绝密★启用前

江苏省2014年普通高校专转本统一考试试卷

高等数学　试卷

注意事项:

1□ 本试卷分为试题卷和答题卡两部分，试题卷共3页。全卷满分150分，考试时间120分钟。

2□ 必须在答题卡上作答，作答到试题卷上无效。作答前务必将自己的姓名和准考证号准确清晰的填写在试题卷和答题卡上的指定位置。

3□ 考试结束时，需将试题卷和答题卡一并交回。

一、选择题（本大题共6小题，每小题4分，共24分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请把所选项前的字母填在答题卷的指定位置上）

1、若 $x=1$ 是函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4x+a}{x^2-3x+2}$ 的可去间断点，则常数 $a=$（　）

A、1　B、2　C、3　D、4

2、曲线 $y=x^4-2x^3$ 的凸区间为　（　）

A、$(-\infty,0]$，$[1,+\infty)$　　B、$[0,1]$　　C、$\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right]$　　D、$\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$

3、若函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $x\sin x$，则 $\int f''(x)dx=$（　）

A、$x\sin x+C$　B、$2\cos x-x\sin x+C$　C、$\sin x-x\cos x+C$　D、$\sin x+x\cos x+C$

4、已知函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z^3-3yz+x^3-2=0$ 所确定，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=1\\y=0}}=$____。

A、-1　　B、0　　　C、1　　　D、2

5、二次积分 $\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy$ 交换积分次序后得____。

A、$\int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x,y)dx$ B、$\int_0^1 dy \int_1^{2-y} f(x,y)dx$

C、$\int_0^1 dy \int_{2-y}^2 f(x,y)dx$ D、$\int_0^1 dy \int_1^{2-y} f(x,y)dx$

6、下列级数发散的是__。

A、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ B、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ C、$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{n^2}\right)$ D、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$

二、填空题(本大题共6小题，每小题4分，共24分)

7□曲线 $y = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$ 的水平渐近线的方程为

8□设函数 $f(x) = ax^3 - 9x^2 + 12x$ 在 $x = 2$ 处取得极小值，则 $f(x)$ 的极大值为

9□定积分 $\int_{-1}^{1} (x^2+1)\sqrt{1-x^2}dx$ 的值为

10□函数 $z = \arctan \frac{y}{x}$ 的全微分 $dz =$

11□设向量为 $\vec{a} = (1,2,1), \vec{b} = (1,0,-1)$，两向量 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \vec{b}$ 的夹角为

12□幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛域为

3□计算题(本大题共8小题，每小题8分，共64分)

13□求极限 $\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x \arcsin x} - \frac{1}{x^2}\right)$

14□设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = (t+1)e^{2t} \\ e^y + ty = e \end{cases}$ 所确定，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}$。

15□求不定积分 $\int x \ln^2 x dx$

16□计算定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{2x-1}}{2x+3} dx$

17□求平行于 x 轴且经过两点 $M(1,1,1)$ 与 $N(2,3,4)$ 的平面方程。

18□设 $z=f(\sin x,x^2-y^2)$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

19□计算二重积分 $\iint\limits_D (x+y)dxdy$ ，其中D为由三直线 $y=-x,y=1,x=0$ 所围成的平面区域。

20□求微分方程 $y''-2y'=xe^{3x}$ 的通解。

4□证明题（本大题共2小题，每小题9分，共18分）

21□证明，方程 $x\ln x=3$ 在区间 $(2,3)$ 内有且仅有一个实根。

22□证明：当 $x>0$ 时，$e^x-1>\dfrac{1}{2}x^2+\ln(x+1)$

5□综合题（本大题共2小题，每小题10分，共20分）

23□设平面图形D由抛物线 $y=1-x^2$ 及其在点 $(1,0)$ 处的切线以及 y 轴所围成，试求：

□1□平面图形D的面积；

□2□平面图形D绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积。

24□设 $\varphi(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，且满足方程 $\int_0^x t\varphi(t)dt=1-\varphi(x)$，

□1□求函数 $\varphi(x)$ 的解析式

□2□讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-1}{x^2} & x\neq 0\\ -\dfrac{1}{2} & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性。

答案

□3□**一、选择题（本大题共6小题，每小题4分，共24分）**

□4□1、C　2、B　3、B　4、A　5、D　6、D

□5□**二、填空题（本大题共6小题，每小题4分，共24分）**

□6□7、$y=e^{-2}$　8、5　9、$\frac{\pi}{2}$　10、$dz=-\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$　11、$\frac{\pi}{3}$　12、$[0,2)$

□7□三、计算题(本大题共8小题，每小题8分，共64分)

□8□13、原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x^2\arcsin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}\,3x^2}$

□9□$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{1-x^2}\,3x^2}=-\frac{1}{6}$

□10□14、$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{y}{e^y+t}}{e^{2t}(3+2t)}$，$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=-\frac{1}{3e}$.

□11□15、$\int x\ln^2 x dx=\frac{1}{2}\int \ln^2 x dx^2=\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\int\frac{1}{2}x^2 d\ln^2 x=\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\int x\ln x dx$

□12□

$=\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\frac{1}{2}\int\ln x dx^2=\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{2}\int x^2 d\ln x=\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{2}\int xdx$

$=\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{4}x^2+C$

□13□16、令$\sqrt{2x-1}=t$，

□14□则原式$=\int_0^2\frac{t^2}{4+t^2}dt=\int_0^2\frac{t^2+4-4}{4+t^2}dt=\int_0^2(1-\frac{4}{4+t^2})dt=2-2\arctan\left.\frac{t}{2}\right|_0^2=2-\frac{\pi}{2}$

□15□17、平面Π的法向量$\vec{n}=\overrightarrow{MN}\times\vec{i}=(1,2,3)\times(1,0,0)=(0,3,-2)$，

□16□直线方程：$0(x-1)+3(y-1)-2(z-1)=0$.即$3y-2z-1=0$.

□17□18、$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos xf_1'+2xf_2'$

□18□$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos xf_{12}''\cdot(-2y)+2xf_{22}''\cdot(-2y)=-2y\cos xf_{12}''-4xyf_{22}''$

□19□19、$\iint\limits_D(x+y)dxdy=\int_{□}^{□}dy\int_{-y}^{0}(x+y)dx=\int_0^1\frac{y^2}{2}dy=\frac{1}{6}$

□20□20、特征方程：$r^2-2r=0$，$r_1=0,r_2=2$，齐次方程的通解为 $Y=C_1+C_2e^{2x}$.令

特解为 $y^*=x(Ax+B)e^{2x}$，则 $y^{*\prime}=(2Ax^2+2Bx+2Ax+B)e^{2x}$，

□21□ $y^{*\prime\prime}=(4Ax^2+4Bx+8Ax+2A+4B)e^{2x}$ 代入原方程得：

$(4Ax+2A+2B)e^{2x}=xe^{2x}$，

□22□有待定系数法得：

□23□ $\begin{cases}4A=1\\2A+2B=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}A=\dfrac{1}{4}\\B=-\dfrac{1}{4}\end{cases}$，所以通解为 $y=C_1+C_2e^{2x}+x(\frac{1}{4}x-\frac{1}{4})e^{2x}$.

□24□四、证明题（本大题共2小题，每小题9分，共18分）

□25□21、令 $f(x)=x\ln x-3$,显然在区间 $(2,3)$ 上连续，且

$f(2)=2\ln 2-3=\ln\dfrac{8}{e^3}<\ln 1<0,$

□26□ $f(3)=3\ln 3-3=3(\ln 3-1)>0,$根据零点定理，$\exists\xi\in(2,3),f(\xi)=0$ 成立.

□27□又$\because$ $f'(x)=\ln x-1>0$，$x\in(2,3)$，$f'(x)$ 单调递增，唯一性得证.

□28□22、令 $f(x)=e^x-1-\dfrac{1}{2}x^2-\ln(x+1)$，则 $f'(x)=e^x-x-\dfrac{1}{x+1}$，

$f''(x)=e^x-1+\dfrac{1}{(x+1)^2}$，

□29□在 $x>0$ 时，$f''(x)$ 单调递增，$f''(x)>f''(0)=1>0$，

□30□所以 $f'(x)$ 单调递增，$f'(x)>f'(0)=0$，所以 $f(x)$ 单调递增，

$f(x)>f(0)=0$，得证.

□31□五、综合题（本大题共2小题，每小题10分，共20分）

□32□23、(1) $k_{\square}=y'=-2x$，切线：,$y-0=-2(x-1)$，即 $y=-2(x-1)$，

□33□ D 面积 $\int_0^1[-2(x-1)-(1-x^2)]dx=\dfrac{1}{3}$.

□34□(2) $V_y=\pi\int_{\square}^{\square}(1-\dfrac{y}{2})^2dy-\pi\int_0^1(1-y)dy=\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{1}{2}\pi=\dfrac{1}{6}\pi$

24、已知 $\int_0^x t\varphi(t)dt = 1-\varphi(x)$ 两边同时对 x 求导得：$x\varphi(x) = -\varphi'(x)$，

$\varphi(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$，令 $x=0$ 代入 $\int_0^x t\varphi(t)dt = 1-\varphi(x)$ 得 $\varphi(0)=1$，所以求得

$C=1, \varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

(2) 因为 $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}, \varphi'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}, \varphi''(x) = (x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}, \varphi'''(x) = (3x-x^3)e^{-\frac{x^2}{2}}$

$\varphi(0)=1$，$\varphi'(0)=0$，$\varphi''(0)=-1, \varphi'''(0)=0$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\varphi'(x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\varphi''(x)}{2} = \frac{\varphi''(0)}{2} = -\frac{1}{2} = f(0).$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续.

$$\because \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\varphi(x)-1}{x^2}+\frac{1}{2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\varphi(x)-2+x^2}{2x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\varphi'(x)+2x}{6x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\varphi''(x)+x}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{\varphi'''(x)+1}{6} = \frac{1}{6}.$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f'(0)=\frac{1}{6}$.