

正宗（老）南师专转本考试数学公式集

导数公式：

$$\begin{aligned}
 (tgx)' &= \sec^2 x & (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
 (ctgx)' &= -\csc^2 x & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
 (\sec x)' &= \sec x \cdot tgx & (\arctgx)' &= \frac{1}{1+x^2} \\
 (\csc x)' &= -\csc x \cdot ctgx & (\text{arcctgx})' &= -\frac{1}{1+x^2} \\
 (a^x)' &= a^x \ln a \\
 (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a}
 \end{aligned}$$

基本积分表：

$$\begin{aligned}
 \int tgx dx &= -\ln|\cos x| + C & \int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \int \sec^2 x dx = tgx + C \\
 \int ctgx dx &= \ln|\sin x| + C & \int \frac{dx}{\sin^2 x} &= \int \csc^2 x dx = -ctgx + C \\
 \int \sec x dx &= \ln|\sec x + tgx| + C & \int \sec x \cdot tgx dx &= \sec x + C \\
 \int \csc x dx &= \ln|\csc x - ctgx| + C & \int \csc x \cdot ctgx dx &= -\csc x + C \\
 \int \frac{dx}{a^2 + x^2} &= \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C & \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C \\
 \int \frac{dx}{x^2 - a^2} &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C & \int shx dx &= chx + C \\
 \int \frac{dx}{a^2 - x^2} &= \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C & \int chx dx &= shx + C \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \arcsin \frac{x}{a} + C & \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} &= \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C
 \end{aligned}$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

三角函数的有理式积分：

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad u = \tan \frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2du}{1+u^2}$$

一些初等函数：

$$\text{双曲正弦} : shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{双曲余弦} : chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{双曲正切} : thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$arshx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$archx = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$arthx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

两个重要极限：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e = 2.718281828459045...$$

三角函数公式：

· 诱导公式：

函数 角A	sin	cos	tg	ctg
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$
$90^\circ - \alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$
$90^\circ + \alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$
$180^\circ - \alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$
$180^\circ + \alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$270^\circ - \alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$
$270^\circ + \alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$
$360^\circ - \alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$
$360^\circ + \alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$

· 和差角公式:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$$

· 和差化积公式:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

· 倍角公式:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$ctg 2\alpha = \frac{ctg^2 \alpha - 1}{2ctg \alpha} \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg \alpha}{1 - tg^2 \alpha} \quad tg 3\alpha = \frac{3tg \alpha - tg^3 \alpha}{1 - 3tg^2 \alpha}$$

· 半角公式:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$tg \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \quad ctg \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

· 正弦定理: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ · 余弦定理: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

· 反三角函数性质: $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x \quad \arctg x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x$

高阶导数公式——莱布尼兹 (Leibniz) 公式:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

$$= u^{(n)} v + nu^{(n-1)} v' + \frac{n(n-1)}{2!} u^{(n-2)} v'' + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} u^{(n-k)} v^{(k)} + \dots + uv^{(n)}$$

中值定理与导数应用:

拉格朗日中值定理: $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$

柯西中值定理: $\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

当 $F(x) = x$ 时, 柯西中值定理就是拉格朗日中值定理。

曲率:

弧微分公式: $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$, 其中 $y' = \tan \alpha$

平均曲率: $\bar{K} = \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right|$. $\Delta \alpha$: 从M点到M'点, 切线斜率的倾角变化量; Δs : MM弧长。

M点的曲率: $K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| = \frac{|y''|}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}$.

直线: $K = 0$;

半径为a的圆: $K = \frac{1}{a}$.

空间解析几何和向量代数:

空间2点的距离: $d = |M_1 M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

向量在轴上的投影: $\text{Pr } j_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos \varphi$, φ 是 $\overrightarrow{AB}$ 与u轴的夹角。

$\text{Pr } j_u (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \text{Pr } j_u \vec{a}_1 + \text{Pr } j_u \vec{a}_2$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, 是一个数量,

两向量之间的夹角: $\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$, $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \theta$. 例: 线速度: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

向量的混合积: $[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos \alpha$, α 为锐角时,

代表平行六面体的体积。

平面的方程:

1、点法式: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, 其中 $\vec{n}=\{A,B,C\}, M_0(x_0,y_0,z_0)$

2、一般方程: $Ax+By+Cz+D=0$

3、截距式方程: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

平面外任意一点到该平面的距离: $d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

空间直线的方程: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$, 其中 $\vec{s}=\{m,n,p\}$; 参数方程:
$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$$

二次曲面:

1、椭球面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

2、抛物面: $\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z, (p,q \text{ 同号})$

3、双曲面:

单叶双曲面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

双叶双曲面: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (马鞍面)

多元函数微分法及应用

$$\text{全微分: } dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

全微分的近似计算: $\Delta z \approx dz = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$

多元复合函数的求导法:

$$z = f[u(t), v(t)] \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$z = f[u(x, y), v(x, y)] \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

当 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 时,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

隐函数的求导公式:

$$\text{隐函数 } F(x, y) = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{F_x}{F_y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{F_x}{F_y} \right) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\text{隐函数 } F(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

$$\text{隐函数方程组: } \begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \quad J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)}$$

微分法在几何上的应用:

空间曲线 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases}$ 在点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线方程: $\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y-y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$

在点 M 处的法平面方程: $\varphi'(t_0)(x-x_0) + \psi'(t_0)(y-y_0) + \omega'(t_0)(z-z_0) = 0$

若空间曲线方程为: $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$, 则切向量 $\vec{T} = \left\{ \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} \right\}$

曲面 $F(x, y, z) = 0$ 上一点 $M(x_0, y_0, z_0)$, 则:

1、过此点的法向量: $\vec{n} = \{F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)\}$

2、过此点的切平面方程: $F_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0$

3、过此点的法线方程: $\frac{x-x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$

方向导数与梯度:

函数 $z = f(x, y)$ 在一点 $p(x, y)$ 沿任一方向 l 的方向导数为: $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi$

其中 φ 为 x 轴到方向 l 的转角。

函数 $z = f(x, y)$ 在一点 $p(x, y)$ 的梯度: $\text{grad} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}$

它与方向导数的关系是: $\frac{\partial f}{\partial l} = \text{grad} f(x, y) \cdot \vec{e}$, 其中 $\vec{e} = \cos \varphi \cdot \vec{i} + \sin \varphi \cdot \vec{j}$, 为 l 方向上的单位向量。

$\therefore \frac{\partial f}{\partial l}$ 是 $\text{grad} f(x, y)$ 在 l 上的投影。

多元函数的极值及其求法:

设 $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$, 令: $f_{xx}(x_0, y_0) = A$, $f_{xy}(x_0, y_0) = B$, $f_{yy}(x_0, y_0) = C$

则: $\begin{cases} AC - B^2 > 0 \text{ 时, } \begin{cases} A < 0, (x_0, y_0) \text{ 为极大值} \\ A > 0, (x_0, y_0) \text{ 为极小值} \end{cases} \\ AC - B^2 < 0 \text{ 时, } \text{无极值} \\ AC - B^2 = 0 \text{ 时, } \text{不确定} \end{cases}$

重积分及其应用:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

$$\text{曲面 } z = f(x, y) \text{ 的面积 } A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

$$\text{平面薄片的重心: } \bar{x} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D x \rho(x, y) d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) d\sigma}, \quad \bar{y} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D y \rho(x, y) d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) d\sigma}$$

$$\text{平面薄片的转动惯量: 对于 } x \text{ 轴 } I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) d\sigma, \quad \text{对于 } y \text{ 轴 } I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) d\sigma$$

平面薄片（位于 xoy 平面）对 z 轴上质点 $M(0, 0, a), (a > 0)$ 的引力: $F = \{F_x, F_y, F_z\}$, 其中:

$$F_x = f \iint_D \frac{\rho(x, y) x d\sigma}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad F_y = f \iint_D \frac{\rho(x, y) y d\sigma}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad F_z = -fa \iint_D \frac{\rho(x, y) d\sigma}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

常数项级数:

$$\text{等比数列: } 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$\text{等差数列: } 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(n+1)n}{2}$$

调和级数: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 是发散的

级数审敛法:

1、正项级数的审敛法——根植审敛法（柯西判别法）:

$$\text{设: } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}, \text{ 则 } \begin{cases} \rho < 1 \text{ 时, 级数收敛} \\ \rho > 1 \text{ 时, 级数发散} \\ \rho = 1 \text{ 时, 不确定} \end{cases}$$

2、比值审敛法:

$$\text{设: } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n}, \text{ 则 } \begin{cases} \rho < 1 \text{ 时, 级数收敛} \\ \rho > 1 \text{ 时, 级数发散} \\ \rho = 1 \text{ 时, 不确定} \end{cases}$$

3、定义法:

$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$; $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ 存在, 则收敛; 否则发散。

交错级数 $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$ (或 $-u_1 + u_2 - u_3 + \cdots, u_n > 0$) 的审敛法——莱布尼兹定理:

如果交错级数满足 $\begin{cases} u_n \geq u_{n+1} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \end{cases}$, 那么级数收敛且其和 $s \leq u_1$, 其余项 r_n 的绝对值 $|r_n| \leq u_{n+1}$ 。

绝对收敛与条件收敛:

(1) $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$, 其中 u_n 为任意实数;

(2) $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots$

如果(2)收敛, 则(1)肯定收敛, 且称为绝对收敛级数;

如果(2)发散, 而(1)收敛, 则称(1)为条件收敛级数。

调和级数: $\sum \frac{1}{n}$ 发散, 而 $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛;

级数: $\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛;

p 级数: $\sum \frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} p \leq 1 \text{ 时发散} \\ p > 1 \text{ 时收敛} \end{cases}$

幂级数:

$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$ $\begin{cases} |x| < 1 \text{ 时, 收敛于 } \frac{1}{1-x} \\ |x| \geq 1 \text{ 时, 发散} \end{cases}$

对于级数(3) $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$, 如果它不是仅在原点收敛, 也不是在全

数轴上都收敛, 则必存在 R , 使 $\begin{cases} |x| < R \text{ 时收敛} \\ |x| > R \text{ 时发散} \\ |x| = R \text{ 时不定} \end{cases}$, 其中 R 称为收敛半径。

求收敛半径的方法: 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$, 其中 a_n, a_{n+1} 是(3)的系数, 则 $\begin{cases} \rho \neq 0 \text{ 时, } R = \frac{1}{\rho} \\ \rho = 0 \text{ 时, } R = +\infty \\ \rho = +\infty \text{ 时, } R = 0 \end{cases}$

微分方程的相关概念:

一阶微分方程: $y' = f(x, y)$ 或 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

可分离变量的微分方程: 一阶微分方程可以化为 $g(y)dy = f(x)dx$ 的形式, 解法:

$\int g(y)dy = \int f(x)dx$ 得: $G(y) = F(x) + C$ 称为隐式通解。

齐次方程: 一阶微分方程可以写成 $\frac{dy}{dx} = f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, 即写成 $\frac{y}{x}$ 的函数, 解法:

设 $u = \frac{y}{x}$, 则 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$, $u + x \frac{du}{dx} = \varphi(u)$, $\therefore \frac{dx}{x} = \frac{du}{\varphi(u) - u}$ 分离变量, 积分后将 $\frac{y}{x}$ 代替 u ,

即得齐次方程通解。

一阶线性微分方程:

1、一阶线性微分方程： $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

当 $Q(x) = 0$ 时,为齐次方程, $y = Ce^{-\int P(x)dx}$
当 $Q(x) \neq 0$ 时, 为非齐次方程, $y = (\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C)e^{-\int P(x)dx}$

2、贝努力方程： $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, (n \neq 0, 1)$

全微分方程：

如果 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ 中左端是某函数的全微分方程，即：

$du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, 其中： $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$

$\therefore u(x, y) = C$ 应该是该全微分方程的通解。

二阶微分方程：

$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x)$, $\begin{cases} f(x) \equiv 0 \text{ 时为齐次} \\ f(x) \neq 0 \text{ 时为非齐次} \end{cases}$

二阶常系数齐次线性微分方程及其解法：

(*) $y'' + py' + qy = 0$, 其中 p, q 为常数；

求解步骤：

- 1、写出特征方程： $(\Delta)r^2 + pr + q = 0$, 其中 r^2 , r 的系数及常数项恰好是(*)式中 y'', y', y 的系数；
- 2、求出(Δ)式的两个根 r_1, r_2
- 3、根据 r_1, r_2 的不同情况，按下表写出(*)式的通解：

r_1, r_2 的形式	(*)式的通解
两个不相等实根 ($p^2 - 4q > 0$)	$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$
两个相等实根 ($p^2 - 4q = 0$)	$y = (c_1 + c_2 x) e^{r_1 x}$
一对共轭复根 ($p^2 - 4q < 0$) $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$ $\alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$	$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$