第 1 章 函数、极限与连续部分测试卷

一、单项选择题 (每小题 4 分, 共 24 分)

1. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 则 ()。
- A 对任意函数 $\varphi(x)$, 都有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\varphi(x) = 0$ 成立
- B 仅当 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$ 时, 才有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\varphi(x) = 0$ 成立
- C 仅当函数 $\varphi(x)$ 为常数时, 才有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\varphi(x) = 0$ 成立
- D 当函数 $\varphi(x)$ 有界时, 有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\varphi(x) = 0$ 成立
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} \sin x - \cos x}{\sin^2 \frac{x}{2}} =$ ()。
- A 2 B 4 C 6 D 8
3. $f(x) = \frac{x(x-1)}{\sin \pi x}$ 具有 ()。
- A 无穷多个第一类间断点 B 一个跳跃间断点 C 两个可去间断点 D 三个可去间断点
4. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha \sim \beta$, 则 $\alpha - \beta$ 是 () 的无穷小。
- A 比 α 高阶 B 比 α 低阶 C 与 α 同阶 D 与 α 等价
5. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{(a+b)x+b}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}} & x \neq 1 \\ 4 & x = 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续, 则 a, b 的值为 ()。
- A $a=4, b=2$ B $a=4, b=-2$ C $a=-4, b=2$ D $a=-4, b=-2$
6. 下列极限正确的是 ()。
- A $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$ B $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$ C $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$ 不存在 D $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = 0$

二、填空题 (每小题 4 分, 共 24 分)

7. 若 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - x - 2} = 2$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____。

8. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $ae^x + be^{-x} - xe^x$ 与 $\sin x$ 是等价无穷小, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续, 且 $f(2)=4$,

则 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[e^x + \frac{\arcsin x^2}{\tan x \ln(1+x)} \right] = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. 设 $f(x) = 3x + 5$, 则 $f[f(x) - 2] = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{(x-1)(x-2)(x-4)}$ 的间断点为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、计算题 (每小题 8 分, 共 64 分)

13. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2-1} \right)^{3x}$.

14. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$.

15. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x^2 \tan x}$.

16. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

17. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{\arcsin x(1-\cos x)}$.

18. 求 a, b 的值, 使当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - (ax^2 + bx + 1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小。

19. 讨论 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x} & x < 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\ln x}{x-1} & x > 1 \end{cases}$ 在 $x=0, x=1$ 处的连续性, 若间断, 指出间断点的类型。

20. 求函数 $f(x) = \frac{x^2+x}{|x|(x^2-1)}$ 的间断点, 并指出其类型。

四、证明题 (每小题 9 分, 共 18 分)

21. 设连续函数 $f(x)$ 在的值域为 $(\sqrt{3}, 2)$, 证明至少存在一点 $\xi \in (1, 2)$, 使 $f(\xi) = \sqrt{\xi + 2}$.

22. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, $a < c < d < b$, 证明: 对任意的正数 p, q , 至少存在一点 $\xi \in [c, d]$, 使 $pf(c) + qf(d) = (p+q)f(\xi)$ 。

五、综合题 (每小题 10 分, 共 20 分)

23. 求 $f(x) = \frac{1}{\frac{x}{1} - \frac{1}{x}}$ 的间断点, 并指出间断点的类型。
24. 设 $f(x) = \frac{px^2 - 2}{x^2 + 1} + 3qx + 5$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, p, q 为何值时, $f(x)$ 为无穷小量?
 p, q 为何值时, $f(x)$ 为无穷大量?

第 2 章 一元函数微分学部分测试卷

一、单项选择题 (每小题 4 分, 共 24 分)

1. 设 $f(x)$ 是可导函数, 且满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 ()。
 A 2 B 1 C -1 D -2
2. 设 $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x^2) & x > 0 \\ \sqrt{x} & x = 0 \\ x^2\varphi(x) & x < 0 \end{cases}$, 其中 $\varphi(x)$ 为有界函数, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ()。
 A 极限不存在 B 极限存在但不连续 C 连续但不可导 D 可导
3. 曲线 $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x(x^2 - 4)}$ 的渐近线的条数为 ()。
 A 1 B 2 C 3 D 4
4. 设点 $(1, -1)$ 是曲线 $y = ax^3 + bx^2 + x$ 的拐点, 则常数 a, b 的值分别为 ()。
 A $a=1, b=-3$ B $a=1, b=3$ C $a=-1, b=-3$ D $a=-1, b=3$
5. 设 $y = xe^x$, 则在区间 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 内 ()。
 A 函数单调递增其图形是凹的 B 函数单调递增其图形是凸的

- C 函数单调递减其图形是凹的 D 函数单调递减其图形是凸的
6. 下列函数在所给区间满足罗尔定理条件的是 ()。
- A $f(x) = x^2, x \in [0,3]$ B $f(x) = \frac{1}{x^2}, x \in [-1,1]$
- C $f(x) = |x|, x \in [-1,1]$ D $f(x) = x\sqrt{3-x}, x \in [0,3]$

二、填空题 (每小题 4 分, 共 24 分)

7. 设 $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$, 则 $f'(2) =$ _____。
8. 设 $y = y(x)$ 由方程 $e^{x+y} + \cos(xy) = 0$ 所确定, 则 $y' =$ _____。
9. 曲线 $\sin(xy) + \ln(y-x) = x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 _____。
10. 设 $y = \ln(1+x)$, 则 $f^{(7)}(x) =$ _____。
11. $f(x) = x - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 的极小值为 _____。
12. 函数 $f(x) = x \ln x$ 在 $[1,2]$ 上满足拉格朗日中值定理条件的 $\xi =$ _____。

三、计算题 (每小题 8 分, 共 64 分)

13. 设 $y = \ln \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$, 求 y', dy 。
14. 设 $y = x(\sin x)^{\cos x}$, 求 y' 。
15. 设 $\begin{cases} x = \ln \sqrt{1+t^2} \\ y = t - \arctan t \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ 。
16. 设 $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + a^2) & x > 1 \\ \sin b(x-1) & x \leq 1 \end{cases}$, 试确定常数 a, b 的值, 使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导。
17. 设 $y = y(x)$ 由方程 $\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$ 所确定, 求 $y''(0)$ 。
18. 求函数 $f(x) = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值和最小值。
19. 求由方程 $x^2 y^2 + y = 1 \quad (y > 0)$ 所确定函数 $y = y(x)$ 的极值。
20. 设函数 $y = \frac{\ln x}{x}$ 。(1) 求函数的单调区间和极值; (2) 求函数图形的凹凸区间与拐

点; (3) 求函数图形的渐近线。

四、证明题 (每小题 9 分, 共 18 分)

21. 证明: 当 $x > 0$ 时, $e^x - x > 2 - \cos x$ 。

22. 设 α 是一个数, 且 $0 < \alpha < 1$, 证明对任意的 $x > 0$, 有 $\frac{1}{\alpha}x^\alpha + 1 - \frac{1}{\alpha} \leq x$ 。

五、综合题 (每小题 10 分, 共 20 分)

23. 已知函数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 在 $x = 0$ 处有极大值 2, 且 $(-1, 4)$ 是其图形的拐点, 求 a, b, c, d 的值。

24. 在直角坐标平面上通过点 $P(1, 4)$ 引一条直线, 使它在两坐标轴上的正截距之和为最小, 求此直线方程。

第 3 章 一元函数积分学部分测试卷

一、单项选择题 (每小题 4 分, 共 24 分)

1. 设 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, $a \neq 0$, 则 $\int \frac{f(ax)}{a} dx =$ ()。

A $\frac{\sin ax}{a^3 x} + C$ B $\frac{\sin ax}{a^2 x} + C$ C $\frac{\sin ax}{ax} + C$ D $\frac{\cos ax}{ax} + C$

2. 设 $f(x)$ 的导函数为 e^{-x} , 且 $f(0) = 0$, 则 $\int f(-x) dx =$ ()。

A $-e^{-x} + x + C$ B $e^{-x} + x + C$ C $-e^x + x + C$ D $e^x + x + C$

3. 设 $F(x) = \int_1^{\sin x} e^t dt$, 则 $F'(x) =$ ()。

A $e^{\sin^2 x}$ B $\cos x e^{\sin^2 x}$ C $\sin x e^{\cos^2 x}$ D $e^{\cos^2 x}$

4. 设在 $[a, b]$ 上, $f(x) > 0, f'(x) < 0, f''(x) > 0$, 记

$s_1 = \int_a^b f(x) dx, s_2 = f(b)(b-a), s_3 = \frac{b-a}{2}[f(b) + f(a)]$, 则有 ()。

A $s_1 < s_2 < s_3$ B $s_2 < s_1 < s_3$ C $s_3 < s_1 < s_2$ D $s_2 < s_3 < s_1$

5. 设 $f(x)$ 为线性函数, 且 $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 f^2(x) dx = 1$, 则 $f(x) =$ ()。

A $x + \frac{1}{2}$ B $-x + \frac{1}{2}$ C $\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}$ D $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

6. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的一个原函数, 且 $F(x)$ 为奇函数, 则 $f(x)$ 是 ()。
- A 偶函数 B 奇函数 C 非奇非偶函数 D 不能确定

二、填空题 (每小题 4 分, 共 24 分)

7. 设 $f(x) = \ln x$, 则 $\int \frac{f'(e^{-x})dx}{e^x} =$ _____。
8. 设 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} - 2\int_0^1 f(x)dx$, 则 $\int_0^1 f(x)dx =$ _____。
9. $\int_{-1}^1 (x + \sqrt{1-x^2})^2 dx =$ _____。
10. 设 $f(5) = 2, \int_0^5 f(x)dx = 3$, 则 $\int_0^5 xf'(x)dx =$ _____。
11. $\int xf(x^2)f'(x^2)dx =$ _____。
12. $\int_0^3 \sqrt{x^2 - 4x + 4} dx =$ _____。

三、计算题 (每小题 8 分, 共 64 分)

13. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^3} e^{\frac{3}{2}t} dt}{\int_0^x t(t + \sin t) dt}$ 。
14. 求不定积分 $\int e^{\sqrt{3x+2}} dx$ 。
15. 求不定积分 $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx$ 。
16. 求定积分 $\int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx$ 。
17. 设 $f(2x+1) = x^2 e^x$, 求 $\int_1^3 f(x) dx$ 。
18. 求广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ 。
19. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{\sin x}{x}$, 求 $\int x^3 f'(x) dx$ 。
20. 求定积分 $\int_0^\pi \frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\cos^2 x + 2\sin^2 x} dx$ 。

四、证明题 (每小题 9 分, 共 18 分)

21. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$, 又 $F(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_b^x \frac{1}{f(t)} dt$, 证明 $F(x) = 0$ 在 (a, b) 内有且仅有一个实根。

22. 设 $f(x)$ 在 $[0, 2a]$ 连续, 证明: $\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(2a-x)]dx$ 。并由此计算 $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ 。

五、综合题 (每小题 10 分, 共 20 分)

23. 由曲线 $y = 1 - x^2$ ($0 \leq x \leq 1$) 与 x, y 轴围成的区域, 被曲线 $y = ax^2$ ($a > 0$) 分为面积相等的两部分 D_1, D_2 。
- (1) 求 a 的值;
 - (2) 求 D_1 绕 x 轴旋转, D_2 绕 y 轴旋转所得几何体的体积。
24. 设曲线 $y = -x^2 + x + 2$ 与 y 轴交于点 P, 过 P 点作该曲线的切线, 求:
- (1) 切线方程;
 - (2) 切线与该曲线及 x 轴所围成图形的面积;
 - (3) 上述图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积。

第 4 章 微分方程部分测试卷

一、单项选择题 (每小题 4 分, 共 24 分)

1. 微分方程 $y(x+y)dx = x^2 dy$ 是 ()。
- A 一阶线性方程 B 一阶齐次方程 C 可分离变量方程 D 二阶微分方程
2. 微分方程 $y' + \frac{1}{y} e^{y^2+3x} = 0$ 的通解为 ()。
- A $2e^{3x} + 3e^{y^2} = C$ B $-2e^{3x} + 3e^{-y^2} = C$ C $3e^{3x} - 2e^{-y^2} = C$ D $e^{3x} - e^{-y^2} = C$
3. 以 $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$ 为通解的二阶线性常系数齐次微分方程为 ()。
- A $y'' - y' - 6y = 0$ B $y'' + y' + 6y = 0$ C $y'' - y' + 6y = 0$ D $y'' + y' - 6y = 0$
4. $y'' + y' = x^2 e^{-x}$ 的待定特解 $y^* =$ ()。
- A $(Ax^2 + Bx + C)e^{-x}$ B $x(Ax^2 + Bx + C)e^{-x}$ C $Ax^2 e^{-x}$ D $Ax^3 e^{-x}$

5. 可降阶微分方程 $xy'' = y'$ 的通解为 ()。

- A $y = x^2 + C$ B $y = \frac{1}{2}x^2 + C$ C $y = C_1x + C_2$ D $y = C_1x^2 + C_2$

6. 若 y_1, y_2 是 $y'' + py' + qy = 0$ (p, q 为常数) 的两个特解, 则 $y = C_1y_1 + C_2y_2$ (C_1, C_2 为任意常数) 是 ()。

- A 方程的通解 B 方程的特解 C 方程的解 D 不一定是方程的解

二、填空题 (每小题 4 分, 共 24 分)

7. 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, α 是比 Δx 较高阶的无穷小, 函数 $y(x)$ 在任意点处的增量

$$\Delta y = \frac{y\Delta x}{1+x^2} + \alpha, \text{ 且 } y(0) = 1, \text{ 则 } y(1) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

8. 设连续函数 $y(x)$ 满足方程 $y(x) = \int_0^x y(t)dt + e^x$, 则 $y(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9. $y'' - y' = xe^x + x + 1$ 的特解形式为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

10. 设 $y_1 = x$ 为 $y'' + y = x$ 的解, $y_2 = \frac{1}{2}e^x$ 为 $y'' + y = e^x$ 的解, 则 $y'' + y = x + e^x$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

11. $y' = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

12. $y'' - 10y' + 34y = 0$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、计算题 (每小题 8 分, 共 64 分)

13. 求 $xy \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ 满足 $y(e) = 2e$ 的特解。

14. 求 $(y - x^3)dx - 2xdy = 0$ 的通解。

15. 求 $y'' + 2y' - 3y = e^{-3x}$ 的通解。

16. 求 $y'' - 6y' = 2x^2 - x$ 的通解。

17. 已知曲线过点 $(e, 1)$, 且曲线上任一点 (x, y) 处的法线斜率等于 $-\frac{x \ln x}{x + y \ln x}$, 求此曲线方程。

18. 求 $y'' + ky = 0$ 的通解 (k 为常数)。

19. 设 $y(x)$ 由 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 及 $y(0) = 2, y'(0) = -4$ 所确定, 求 $\int_0^{+\infty} y(x) dx$ 。

20. 求可降阶方程 $(1+x^2)y'' = 2xy'$ 的通解。

四、证明题 (每小题 9 分, 共 18 分)

21. 设曲线上任一点 $M(x, y)$ 处切线与 OM 直线垂直, 且曲线过点 $(1, \sqrt{3})$, 证明曲线是以原点为圆心, 半径为 2 的圆。

22. 设 $y_1(x), y_2(x)$ 为 $y'' + py' + qy = f(x)$ (p, q 为常数) 的两个不同的解, 证明:

$y = y_1(x) - y_2(x)$ 是方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的解。

五、综合题 (每小题 10 分, 共 20 分)

23. 设 $f(x)$ 二阶可导, $f(x) = e^x - x \int_0^x f(t) dt + \int_0^x t f(t) dt$, 求 $f(x)$ 的表达式。

24. 有连接 $A(0, 1), B(1, 0)$ 两点的一条凸曲线, 它位于 AB 弦的上方, $P(x, y)$ 为该曲线上任一点, 已知该曲线弧与 AP 之间的面积为 x^3 , 求该曲线方程。

第 5 章 向量代数与空间解析几何部分测试卷

一、单项选择题 (每小题 4 分, 共 24 分)

1. 已知 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = \sqrt{2}$, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$, 则 $|\vec{a} \times \vec{b}| =$ ()。

A 2 B $2\sqrt{2}$ C $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D 1

2. 已知 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 则 $|\vec{a} - \vec{b}| =$ ()。

A 3 B $\sqrt{3}$ C 2 D $\sqrt{2}$

3. 平面 $\pi_1: 2x + y + z - 5 = 0$ 与平面 $\pi_2: x - y + 2z + 3 = 0$ 的夹角为 ()。

A $\frac{\pi}{6}$ B $\frac{\pi}{3}$ C $\frac{\pi}{4}$ D $\frac{\pi}{2}$

4. 直线 $l: \begin{cases} x=2+t \\ y=5-2t \\ z=3 \end{cases}$, 平面 $\pi: 2x+y-z-5=0$, 则直线 l ()。

A 垂直于平面 π B 平行于平面 π C 在平面 π 上 D 与平面 π 斜交

5. 方程 $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ 表示的二次曲面是 ()。

A 球面 B 旋转抛物面 C 圆锥面 D 圆柱面

6. 垂直 $\vec{a} = \{1, 1, 1\}$ 且同时垂直于 Y 轴的单位向量为 ()。

A $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ B $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$ C $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \vec{j})$ D $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i} + \vec{k})$

二、填空题 (每小题 4 分, 共 24 分)

7. 设 $\vec{a} = \{1, 2, 3\}$, $\vec{b} = \{4, 5, 6\}$, 则 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) =$ _____。

8. 若 α, β, γ 是向量 $\vec{a}$ 的方向角, 则 $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma =$ _____。

9. 设 A (1, 2, 1), B (2, 1, 2), C (1, 2, 2), 则以 AB, AC 为邻边的平行四边形面积为 _____。

10. 直线 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{0}$ 与直线 $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$ 的夹角为 _____。

11. 平面 $x - y + z + 3 = 0$ 与平面 $2x - 2y + 2z + 3 = 0$ 之间的距离为 _____。

12. 过点 (2, 3, 4) 且垂直于平面 $3x + y - z + 1 = 0$ 的直线方程是 _____。

三、计算题 (每小题 8 分, 共 64 分)

13. 求过点 M (2, 1, 1) 及直线 $l: \begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$ 的平面方程。

14. 求过点 (0, 1, -1) 且与平面 $\pi_1: 3x+2y-4z+2=0$ 和平面 $\pi_2: x-2y+3z+5=0$ 垂直的平面方程。

15. 求过点 $(3, -2, 0)$ 且与直线 $l_1: \begin{cases} 2x+3y-z+5=0 \\ x-2y+3z-3=0 \end{cases}$ 和直线

$l_2: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{1}$ 都平行的平面方程。

16. 已知 $|\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{b}| = 1, \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$, 求 $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$ 的夹角。

17. 已知 $\vec{a} + 3\vec{b} \perp 7\vec{a} - 5\vec{b}, \vec{a} - 4\vec{b} \perp 7\vec{a} - 2\vec{b}$, 求 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角。

18. 设直线过点 $(-1, 2, 0)$, 垂直于直线 $\begin{cases} x=3t+2 \\ y=-4t-1 \\ z=3 \end{cases}$, 又与平面 $2x-3y+4z+1=0$

平行, 求其方程。

19. 设直线方程 $\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{3-a} = \frac{z-2}{4+b}$, 求 a, b 的值, 使直线同时平行于平面 $2x+3y-2z=0$ 和 $x-6y+2z-3=0$ 。

20. 指出下列各方程在平面解析几何和空间解析几何分别表示什么图形?

(1) $(x-1)^2 + y^2 = 1$ (2) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ (3) $y = x+1$

四、证明题 (每小题 9 分, 共 18 分)

21. 设 $\vec{a}, \vec{b}$ 均为非零向量, 证明: $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ 。

22. 证明两平面

$$\pi_1: Ax + By + Cz + D_1 = 0, \pi_2: Ax + By + Cz + D_2 = 0 \text{ 之间的距离 } d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

五、综合题 (每小题 10 分, 共 20 分)

23. 已知直线 $l_0: \begin{cases} 3x+2y+4z-11=0 \\ 2x+y-3z-1=0 \end{cases}$ 和平面 $\pi: 2x+y+z-1=0$ 。

(1) 求直线 l_0 与平面 π 的交点坐标;

(2) 在平面 π 上求一直线 l , 使之过直线 l_0 与平面 π 的交点且垂直于直线 l_0 。

24. 设平面 π 过点 A (1, 2, 1), B (-1, 2, 0), C (2, 3, 1), 直线 l 过点 (2, 3, 0)

且与平面 $x - y + z + 2 = 0$ 平行, 又与直线 $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 \end{cases}$ 垂直。求直线 l 的方程及直线 l 与平面 π 的夹角。

第 6 章 无穷级数部分测试卷

一、单项选择题 (每小题 4 分, 共 24 分)

1. 下列级数中发散的是 ()。

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ B $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ C $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ D $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

2. 设常数 $a > 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan \frac{a}{n\sqrt{n}}$ ()。

A 绝对收敛 B 条件收敛 C 发散 D 敛散性与 a 有关

3. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4-p}}$ 与广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{p-1}} dx$ 都收敛, 则常数 p 的取值范围为 ()。

A $0 < p < 1$ B $1 < p < 2$ C $2 < p < 3$ D $3 < p < 4$

4. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ 的收敛区间为 ()。

A $(-1, 1)$ B $[-1, 1]$ C $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ D $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+3} x^n$ 的收敛半径为 ()。

A 1 B 3 C $\frac{1}{3}$ D $+\infty$

6. 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n x^{2n}}{(2n)!}$ ($a \neq 0, -1$), 则 $f'''(x) =$ ()。

A $af(x)$ B $a^2 f(x)$ C $\frac{1}{a} f(x)$ D $f(x)$

二、填空题 (每小题 4 分, 共 24 分)

7. 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(2q)^n$ 收敛, 则正数 q 的取值范围为_____。

8. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ 的收敛域为_____。 9. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n-1}) =$ _____。

10. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{3}$ 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{x+1}{2} \right)^n$ 的收敛半径为_____。

11. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ 的和函数 $s(x) =$ _____, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} =$ _____, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n}{n!} =$ _____。

12. 将函数 $f(x) = \frac{1}{4+x^2}$ 展开 x 为的幂级数为_____。

三、计算题 (每小题 8 分, 共 64 分)

13. 判别 $\sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1})$ 的敛散性。 14. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ ($a > 0$) 的敛散性。

15. 判别 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} \right)^n n!$ 的敛散性。 16. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \sqrt{n}} x^{2n}$ 的收敛半径与收敛域。

17. 判别 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 的敛散性, 若收敛, 是绝对收敛, 还是条件收敛。

18. 将函数 $f(x) = \frac{x}{2x^2 + 3x - 2}$ 展开成 $(x+1)$ 的幂级数, 并指出收敛区间。

19. 将 $f(x) = \ln(1-x-2x^2)$ 展开成 x 的幂级数, 并指出收敛区间。

20. 将函数 $f(x) = \cos x$ 展开成 $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的幂级数, 并指出收敛区间。

四、证明题 (每小题 9 分, 共 18 分)

21. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 收敛, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n v_n|$ 收敛。

22. 将函数 $f(x) = \ln(2+x)$ 展开成 x 的幂级数, 并利用该式证明: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$ 。

五、综合题 (每小题 10 分, 共 20 分)

23. 将 $f(x) = \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)'$ 展开成 x 的幂级数, 并由此求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ 之值。

24. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^2}$ ($a > 0$) 的敛散性。

第 7 章 多元函数微积分学部分测试卷

一、单项选择题 (每小题 4 分, 共 24 分)

1. 设 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处偏导数存在, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h, y_0) - f(x_0 - h, y_0)}{h} =$ ()。
- A 0 B $f'_x(x_0, y_0)$ C $2f'_x(x_0, y_0)$ D $3f'_x(x_0, y_0)$
2. 设 $z = f^2(xy)$, 其中 f 可微, 则 $dz =$ ()。
- A $2f'(xy)(ydx + xdy)$ B $2f'(xy)(dx + dy)$
- C $2f(xy)f'(xy)(ydx + xdy)$ D $2f(xy)f'(xy)(dx + dy)$
3. 设 $f(x, y) = \arcsin \sqrt{\frac{y}{x}}$, 则 $f'_x(2, 1) =$ ()。
- A $-\frac{1}{4}$ B $\frac{1}{4}$ C $-\frac{1}{2}$ D $\frac{1}{2}$
4. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$ 确定, 其中 f 可微, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$ ()。
- A $-z$ B z C $-y$ D y
5. 二次积分 $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx$ 的另一种积分次序是 ()。
- A $\int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy$ B $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy$
- C $\int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy$ D $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy$

6. 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, 则将二重积分 $\iint_D e^{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$ 化为极坐标系下的二次积分为 ()。

A $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 e^r dr$ B $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 e^r r dr$ C $\int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 e^r dr$ D $\int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 e^r r dr$

二、填空题 (每小题 4 分, 共 24 分)

7. 设 $f(x, y) = 2x^2 + ax + xy^2 + by$ 在点 $(1, 1)$ 处取得极值, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. 设 $z = \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right)$, 则 $dz|_{(1,2)} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9. 设 $u = f(x, xy, xyz)$, 其中 f 可微, 则 $\frac{\partial u}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

10. 设 $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

11. 设 $D: x^2 + y^2 \leq R^2$, 则 $\iint_D x(x^2 + y^2) dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

12. 交换二次积分的积分次序 $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 f(x, y) dy = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、计算题 (每小题 8 分, 共 64 分)

13. 设 $z = f(x^2 - y^2, xy)$, 其中 f 具有二阶连续的偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

14. 设 $z = f(2x - y, \sin x)$, 其中 f 具有二阶连续的偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

15. 设 $z = yf(2x + 3y, y^2)$, 其中 f 具有二阶连续的偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

16. 设 $z = f\left(xy, \frac{x}{y}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, g 二阶可导, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

17. 计算二重积分 $\iint_D x^2 y dx dy$, 其中 D 为 $y = x$ 与 $y = x^2$ 所围成的平面区域。

18. 计算二重积分 $\iint_D x^2 dx dy$, 其中 D 为 $y = \sqrt{x}, y = \frac{1}{x}, x = 2$ 及 x 轴所围成的平面区域。

19. 计算 $I = \int_1^2 dy \int_y^{2\sin x} \frac{\sin x}{x-1} dx$ 。

20. 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq x, x^2 + y^2 \leq 2x\}$ 。

四、证明题 (每小题 9 分, 共 18 分)

21. 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$ 。

(1) 证明: $F(t) = \int_1^t (x-1)f(x) dx$; (2) 求 $F'(2)$ 。

22. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $F(x^2 - y^2, y^2 - z^2) = 0$ 确定, 证明: $y z \frac{\partial z}{\partial x} + x z \frac{\partial z}{\partial y} = xy$ 。

五、综合题 (每小题 10 分, 共 20 分)

23. 计算二重积分 $\iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$ 。

24 设 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt$, 计算 $\int_0^\pi f(x) dx$ 。