测试卷答案

第1章 函数、极限与连续

一、单项选择题

1. D　2. B　3. C　4. A　5. B　6. B

二、填空题

7. $a=2$, $b=-8$　8. $a=1$, $b=-1$　9. 1　10. 1　11. $9x+14$　12. $x=1$, $x=2$.

三、计算题

13. 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)^{(x^2-1)\cdot\frac{3x}{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)^{(x^2-1)}\right]^{\frac{3x}{x^2-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2-1}}=e^0=1.$

14. 令 $y=(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$，则 $\ln y=\frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{x}$

$$\lim_{x\to0^+}\ln y=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\cos\sqrt{x}}\cdot(-\sin\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=-\frac{1}{2}$$

$\therefore\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}y=e^{-\frac{1}{2}}.$

或用第二个重要极限求该极限

$$\text{原式}=\lim_{x\to0^+}\left(1+(\cos\sqrt{x}-1)\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\left(1+(\cos\sqrt{x}-1)\right)^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left[\left(1+(\cos\sqrt{x}-1)\right)^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}}\right]^{\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}x}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

15. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)\cdot\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x\left[1-\cos(\sin x)\right]}{3x^2}$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\sin^2x}{x^2}=\frac{1}{6}.$$

16. 原式 $\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{\frac{1}{2}x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{1}=2.$

17. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\arcsin x\cdot(1-\cos x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{\arcsin x\cdot(1-\cos x)}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x}{x}=\frac{1}{2}.$$

18. 由题意得 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-(ax^2+bx+1)}{x^2}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-2ax-b}{2x}=0$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}(e^x-2ax-b)=0\Rightarrow b=1.$　$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-2ax-b}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-2a}{2}=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}.$

19. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0$， $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 0=0$， $f(0)=0$

$\because \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$，$\therefore f(x)$在$x=0$处连续.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 0=0$， $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ln x}{x-1}\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=1$.

$\because \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$，$\therefore f(x)$在$x=1$处不连续（间断，$x=1$为第一类跳跃间断点）

20. $|x|(x^2-1)=0 \Rightarrow$ 间断点为 $x=0$，$x=1$，$x=-1$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x(x+1)}{-x(x+1)(x-1)}=1$， $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x(x+1)}{x(x+1)(x-1)}=-1$.

$\because \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，$\therefore f(x)$为跳跃间断点

$\because \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x+1)}{x(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$，$\therefore x=1$为无穷间断点

$\because \lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x+1)}{-x(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{-(x-1)}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore x=-1$为可去间断点

四. 综合题

21. $x=0$，$x=-1$，$x=1$为间断点

$\because \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x(x+1)}}{\frac{1}{(x-1)x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1}{x+1}=-1$，$\therefore x=0$为可去间断点.

$\because \lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-1}{x+1}=\infty$，$\therefore x=-1$为无穷间断点.

$\because \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1}=0$，$\therefore x=1$为无穷间断点.

22. 由 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3qx^3+(p+5)x^2+3qx+3}{x^2+1}=0$，得：$\begin{cases}3q=0\\ p+5=0\end{cases}\Rightarrow p=-5,\ q=0$

由 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3qx^3+(p+5)x^2+3qx+3}{x^2+1}=\infty$，得：$\begin{cases}3q\neq 0\\ p+5\in R\end{cases}\Rightarrow p\in R,\ q\neq 0$.

五. 证明题

23. 令 $F(x)=f(x)-\sqrt{x+2}$，$x\in[1,2]$. $\sqrt{3}\leqslant f(x)\leqslant 2$.

$F(1)=f(1)-\sqrt{3}\geqslant 0$，$F(2)=f(2)-2<0$，即$F(1)\cdot F(2)<0$，

显然$F(x)$在$[1,2]$上连续，

由零点定理得. $\exists\xi\in(1,2)$，使$F(\xi)=0$，即$f(\xi)=\sqrt{\xi+2}$.

24. $f(x)$在$[c,d]$上连续 $\Rightarrow m\leq f(c)\leq M$，$m\leq f(d)\leq M$ $\Rightarrow (p+q)m\leq pf(c)+qf(d)\leq(p+q)M$

$\Rightarrow m\leq\dfrac{pf(c)+qf(d)}{p+q}\leq M$. 由介值定理得. $\exists\xi\in[c,d]$，使 $\dfrac{pf(c)+qf(d)}{p+q}=f(\xi)$

即 $pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$.

第2章 一元函数微分学

一. 单项选择题

1. D　2. D　3. C.　4. A　5. A　6. D.

二. 填空题

7. $\dfrac{1}{99\cdot 50\cdot 101\cdot 102}$　8. $\dfrac{y\sin(xy)-e^{x+y}}{e^{x+y}-x\sin(xy)}$.　9. $y=x+1$　10. $\dfrac{6!}{(1+x)^7}$　11. $-\frac{1}{2}$　12. $\frac{4}{e}$.

三. 计算题

13. $y=\ln(\sqrt{1+x}-1)-\ln(\sqrt{1+x}+1)$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1+x}-1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\cdot\frac{2}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{1+x}\cdot x}=\frac{1}{x\sqrt{1+x}}$$

$$dy=y'dx=\frac{1}{x\sqrt{1+x}}dx.$$

14. 对数求导法　$\ln y=\ln x+\cos x\ln(\sin x).$

两边对x求导　$\dfrac{1}{y}\cdot y'=\dfrac{1}{x}+(-\sin x)\ln(\sin x)+\cos x\cdot\dfrac{1}{\sin x}\cdot\cos x$

$$y'=x(\sin x)^{\cos x}\left[\frac{1}{x}-\sin x\ln(\sin x)+\cot x\cdot\cos x\right].$$

15. $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}=t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{\frac{t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{t}.$$

16. 由$f(x)$在$x=1$处连续(可导必连续) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\sin b(x-1)=0,\ \lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\ln(x^2+a^2)=\ln(1+a^2)$

$\therefore \ln(1+a^2)=0\Rightarrow a^2=0\Rightarrow a=0$　　$f(1)=0$

由$f(x)$在$x=1$处可导 $\Rightarrow f'_-(1)=f'_+(1).$

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sin b(x-1)}{x-1}=b,$　$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2\ln x}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\frac{2}{x}}{1}=2$

$\therefore b=2.$

17. $\ln(x^2+y) = x^3y + \sin x \quad (1)$

(1) 两边对 x 求导得 $\dfrac{1}{x^2+y}\cdot(2x+y') = 3x^2y + x^3y' + \cos x \quad (2)$

由 (2) 得 $2x+y' = 3x^4y + 3x^2y^2 + x^5y' + x^3yy' + y\cos x \quad (3)$

(3) 两边对 x 求导得

$$2 + y'' = 12x^3y + 3x^4y' + 6xy^2 + 6x^2yy' + 5x^4y' + x^5y''$$
$$+ 3x^2yy' + x^3(y')^2 + x^3y\cdot y'' + y'\cos x - y\sin x \quad (4)$$

将 $x=0$ 代入 (1) 得 $y=1$.

将 $x=0, y=1$ 代入 (2) 得 $y'=1$

将 $x=0, y=1, y'=1$ 代入 (4) 得 $y''=-1$, $\therefore y''(0)=-1$.

18. $y' = \dfrac{2(x-1)(1+x)}{(1+x^2)^2}$, $y'=0 \Rightarrow x=-1, x=1 \in (-2,2)$

$y(-1)=2,\ y(1)=0,\ y(-2)=\dfrac{9}{5},\ y(2)=\dfrac{1}{5}$

比较得 最大值为 2, 最小值为 0.

19. 两边对 x 求导得 $2xy^2 + 2x^2yy' + y' = 0 \quad (y>0) \quad (1)$

由 $y'=0$ 得 $x=0$.

(1) 两边对 x 求导得 $2y^2 + 4xyy' + 4xyy' + 2x^2(y')^2 + 2x^2yy'' + y'' = 0 \quad (3)$

当 $x=0$ 时, $y'=0$ 代入 (3) $y''=-2y^2<0$ $\therefore y(0)=1$ 为极大值.

20. (1) 定义域为 $(0,+\infty)$

$y' = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $y'=0 \Rightarrow x=e$.

x	$(0,e)$	e	$(e,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

$y=\frac{\ln x}{x}$ 单调增加区间为 $(0,e)$, 单调减少区间为 $(e,+\infty)$

当 $x=e$ 时, $y_{极大值} = \frac{1}{e}$.

(2) 定义域为 $(0,+\infty)$.

$y''=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$　$y''=0 \Rightarrow x=e^{\frac{3}{2}}$.

x	$(0,e^{\frac{3}{2}})$	$e^{\frac{3}{2}}$	$(e^{\frac{3}{2}},+\infty)$
y''	$-$	0	$+$
y	$\cap$	$\frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}$	$\cup$

曲线 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 的凹区间为 $(e^{\frac{3}{2}},+\infty)$，凸区间为 $(0,e^{\frac{3}{2}})$，拐点为 $(e^{\frac{3}{2}},\dfrac{3}{2e^{\frac{3}{2}}})$.

(3) $\because \lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$，$\therefore y=0$ 为曲线的水平渐近线

$\because \lim\limits_{x\to0^+} y=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x\cdot\frac{1}{\ln x}}=\infty$，$\therefore x=0$ 为曲线的垂直渐近线

四. 综合题

21. $y=ax^3+bx^2+cx+d$，$y'=3ax^2+2bx+c$，$y''=6ax+2b$.

该函数为三次多项式函数，一、二阶导数均存在.

$\therefore y'(0)=0 \Rightarrow c=0$

$y(0)=2 \Rightarrow d=2$

$y''(-1)=0 \Rightarrow -6a+2b=0 \Rightarrow b=3a$

$y(-1)=4 \Rightarrow -a+b-c+d=4$

解得：$a=1$, $b=3$, $c=0$, $d=2$.

22. 设直线的斜率为 k，直线方程为 $y-4=k(x-1) \Rightarrow y=kx+4-k$

当 $x=0$ 时，$y=4-k$，当 $y=0$ 时，$x=\dfrac{k-4}{k}$.　$\because \begin{cases}4-k>0\\ \frac{k-4}{k}>0\end{cases} \Rightarrow k<0$

截距之和 $z=4-k+1-\dfrac{4}{k}=5-k-\dfrac{4}{k}$

$z'=-1+\dfrac{4}{k^2}$，$z'=0 \Rightarrow k=-2$ ($k=2$ 舍去)

$z''=-\dfrac{8}{k^3}$　$\because z''(-2)=1>0$，$\therefore z(-2)=5+2+2=9$ 为极小值

因为驻点唯一，所以 9 也是最小值. 此时直线方程为：$y=-2x+6$.

五. 证明题

23. 证: 令 $f(x)=e^x-x-2+\cos x$, $x\in(0,+\infty)$.

$f'(x)=e^x-1-\sin x$, $f''(x)=e^x-\cos x$.

当 $x>0$ 时, $e^x>1$, $\cos x\le 1$. $\therefore f''(x)=e^x-\cos x>0 \Rightarrow f'(x)\uparrow$

$\Rightarrow f'(x)>f'(0)=0 \Rightarrow f(x)\uparrow \Rightarrow f(x)>f(0)=0 \Rightarrow e^x-x>2-\cos x$.

24. 证: 令 $f(x)=\frac{1}{\alpha}x^\alpha+1-\frac{1}{\alpha}-x$, $x\in(0,+\infty)$

$f'(x)=x^{\alpha-1}-1$, $f'(x)=0 \Rightarrow x=1$.

$f''(x)=(\alpha-1)x^{\alpha-2}$

$\because f''(1)=\alpha-1<0$, $\therefore f(1)=0$ 为极大值

$\because f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一的极大值 $f(1)=0$, $\therefore$ 由单峰原理得

$f(1)=0$ 也是最大值

故当 $x>0$ 时, $f(x)\le 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha}x^\alpha+1-\frac{1}{\alpha}\le x$.

第3章 一元函数积分学

一、单项选择题

1. A　2. C　3. B　4. B　5. C　6. A

二、填空题

7. $x+C$　8. $\frac{\pi}{12}$　9. 2　10. 7　11. $\frac{1}{4}[f(x^2)]^2+C$　12. $\frac{5}{2}$.

三、计算题

13. $原式 \overset{洛}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{3}{2}x^2}\cdot 3x^2}{x(x+\sin x)} = 3\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x+\sin x} = 3\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+\frac{\sin x}{x}} = \frac{3}{2}$.

14. 令 $\sqrt{3x+2}=t$，则 $x=\frac{t^2-2}{3}$，$dx=\frac{2}{3}t\,dt$.

$$原式 = \frac{2}{3}\int t e^t dt = \frac{2}{3}\int t\, d(e^t) = \frac{2}{3}te^t - \frac{2}{3}\int e^t dt$$
$$= \frac{2}{3}te^t - \frac{2}{3}e^t + C = \frac{2}{3}\sqrt{3x+2}\,e^{\sqrt{3x+2}} - \frac{2}{3}e^{\sqrt{3x+2}} + C.$$

15. $原式 = 2\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\,d(\sqrt{x}) = 2\int \arcsin\sqrt{x}\,d(\arcsin\sqrt{x}) = (\arcsin\sqrt{x})^2 + C$.

16. 令 $x=2\sin t$，$dx=2\cos t\,dt$，$\begin{array}{c|c} x & 0\to 2 \\ \hline t & 0\to\frac{\pi}{2}\end{array}$

$$原式 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t\cdot 2\cos t\cdot 2\cos t\,dt = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,dt$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\,dt = \pi - \frac{1}{2}\sin 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

17. 令 $2x+1=t$，则 $x=\frac{t-1}{2}$.　$f(t)=\frac{(t-1)^2}{4}e^{\frac{t-1}{2}}$

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3\frac{(x-1)^2}{4}e^{\frac{x-1}{2}}dx \xlongequal{令\frac{x-1}{2}=u} \int_0^1 u^2e^u\,2du = 2\int_0^1 u^2\,d(e^u)$$
$$= 2\left(u^2e^u\Big|_0^1 - 2\int_0^1 ue^u du\right) = 2e - 4\int_0^1 u\,d(e^u)$$
$$= 2e - 4\left(ue^u\Big|_0^1 - \int_0^1 e^u du\right) = 2e - 4e + 4e^u\Big|_0^1 = 2e-4.$$

18. $原式 = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^x+\frac{1}{e^x}} = \int_1^{+\infty}\frac{e^x dx}{1+(e^x)^2} = \int_1^{+\infty}\frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2} = \arctan e^x\Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan e$.

（其中 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan e^x = \frac{\pi}{2}$）

19. $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.

$$\int x^3 f'(x)dx = \int x^3\,df(x) = x^3 f(x) - \int f(x)\cdot 3x^2 dx$$
$$= x^3\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2} - 3\int(x\cos x - \sin x)dx = x^2\cos x - x\sin x - 3\int x\,d(\sin x) + 3\int\sin x\,dx$$
$$= x^2\cos x - x\sin x - 3x\sin x + 6\int\sin x\,dx = x^2\cos x - 4x\sin x - 6\cos x + C.$$

20. 原式 $= \int_0^{\pi} \frac{|\cos x|}{1-\sin^2 x+2\sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{1+\sin^2 x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{-\cos x\, dx}{1+\sin^2 x}$

$= \arctan(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \arctan(\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$= \arctan 1 - (0-\arctan 1) = 2\arctan 1 = \frac{\pi}{2}.$

四. 证明题

21. 显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $F(a) = \int_b^a \frac{1}{f(t)} dt = -\int_a^b \frac{1}{f(t)} dt < \int_a^b 0 dt = 0.$

$F(b) = \int_a^b f(t) dt > \int_a^b 0 dt = 0.$ 即 $F(a)\cdot F(b) < 0.$

由零点定理得：至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使 $F(\xi)=0$. 即 $F(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个实根

又因为 $F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} \geq 2\sqrt{f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}} = 2 > 0$. 即 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加.

所以 $F(x)=0$ 在 (a,b) 内至多有一个实根.

综合以上得 $F(x)=0$ 在 (a,b) 内有且仅有一个实根.

22. $\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^{2a} f(x)dx$

$\int_0^a f(2a-x)dx \xlongequal{\text{令 } 2a-x=t} \int_{2a}^a f(t)(-dt) = -\int_{2a}^a f(t)dt = \int_a^{2a} f(t)dt = \int_a^{2a} f(x)dx.$

$\therefore \int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(2a-x)dx$

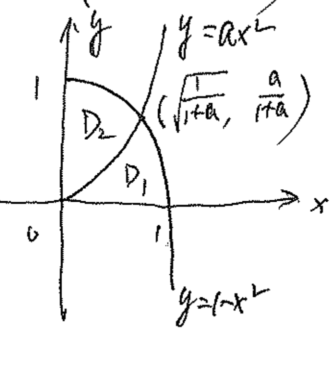
$= \int_0^a [f(x)+f(2a-x)]dx =$ 右边.

$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} + \frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}\right] dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{x\sin x+(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}\right] dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x}$

$= -\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos x)}{1+\cos^2 x} = -\pi \arctan(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\pi(0-\arctan 1) = \frac{\pi^2}{4}.$

五. 综合题



23.(1) $S = \int_0^1 (1-x^2)dx = (x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

$S_{D_2} = \int_0^{\sqrt{\frac{1}{a+1}}} (1-x^2-ax^2)dx = \left[x-\frac{(1+a)}{3}x^3\right]\Big|_0^{\sqrt{\frac{1}{a+1}}}$

$= \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{1+a}}$

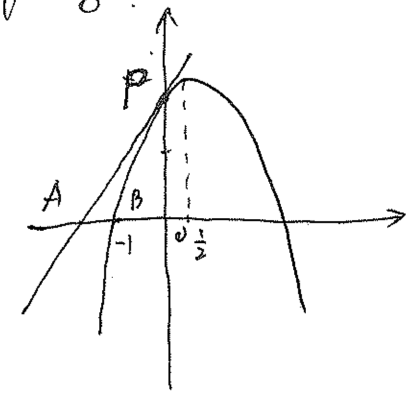
由 $S_{D_1}=S_{D_2}$ 得，$S_{D_2}=\frac{1}{2}S$. $\frac{a}{3\sqrt{1+a}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{3} \Rightarrow a=3$.

(2) 交点 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$

$$V_x=V_{1x}+V_{2x}=\pi\int_0^{\frac{1}{2}} 9x^4\,dx+\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x^2)^2\,dx=\frac{\pi}{12}.$$

$$V_y=V_{1y}+V_{2y}=\pi\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{1}{3}y\,dy+\pi\int_{\frac{3}{4}}^{1}(1-y)\,dy=\frac{\pi}{8}.$$

24. $y=-x^2+x+2=-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}$



(1) $P(0,2)$ $y'=-2x+1$. $k_{切}=1$.

切线 PA: $y-2=x \Rightarrow y=x+2$

(2) $A(-2,0)$, $B(-1,0)$

$$S=S_{Rt\triangle PAO}-S_{曲边PBO}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2-\int_{-1}^{0}(-x^2+x+2)\,dx$$

$$=2-\left(2x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{0}=2-\left(-\frac{5}{6}+2\right)=\frac{5}{6}.$$

(3) $V_x=\frac{1}{3}\pi\cdot2^2\cdot2-\pi\int_{-1}^{0}(-x^2+x+2)^2\,dx=\frac{29\pi}{30}$.

第4章 常微分方程

一. 单项选择题

1. B　2. C　3. D　4. B　5. D　6. C.

二. 填空题

7. $e^{\frac{\pi}{4}}$　8. $y=e^x(x+1)$　9. $y^*=x(Ax+B)e^x+x(Cx+D)$.　10. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x+\frac{1}{2}e^x$

11. $y=Cxe^{-x}$　12. $y=e^{5x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$

三. 计算题

13. $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$　令 $\frac{y}{x}=u$，则 $y=ux$，$\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$.

$x\frac{du}{dx}+u=\frac{1}{u}+u$　$x\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}$　$u\,du=\frac{dx}{x}$

$\int u\,du=\int\frac{dx}{x}$　$\frac{1}{2}u^2=\ln x+\ln C$　$u^2=\ln(Cx)^2$　$(\frac{y}{x})^2=2\ln Cx$

$y^2=2x^2\ln Cx$.　$y(e)=2e\Rightarrow 4e^2=2e^2(\ln C+1)$　$\ln C+1=2$, $C=e$

$y^2=2x^2(1+\ln x)$.

14.
从原式解得 $y'=\frac{1}{2x}y-\frac{1}{2}x^2\Rightarrow y'-\frac{1}{2x}y=-\frac{1}{2}x^2$.

$p(x)=-\frac{1}{2x}$, $q(x)=-\frac{1}{2}x^2$.

代入公式得 $y=e^{\int\frac{1}{2x}dx}\left(\int -\frac{1}{2}x^2e^{-\int\frac{1}{2x}dx}dx+C\right)$

$=e^{\frac{1}{2}\ln x}\left(-\frac{1}{2}\int x^2\cdot e^{-\frac{1}{2}\ln x}dx+C\right)$

$=\sqrt{x}\left(-\frac{1}{2}\int x^{\frac{3}{2}}dx+C\right)$

$=\sqrt{x}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C\right)$

$=-\frac{1}{5}x^3+C\sqrt{x}$.

15. 1° 求 $y''+2y'-3y=0$ 的通解 Y.

$r^2+2r-3=0\Rightarrow(r+3)(r-1)=0\Rightarrow r=-3, r=1\Rightarrow Y=C_1e^{-3x}+C_2e^x$.

2° 求 $y''+2y'-3y=e^{-3x}$ 的一个特解 y^*

$f(x)=e^{-3x}$, $n=0$, $\lambda=-3$.　$y^*=x\cdot Ae^{-3x}=Axe^{-3x}$

$y^{*\prime}=Ae^{-3x}-3Axe^{-3x}=(A-3Ax)e^{-3x}$,　$y^{*\prime\prime}=-3Ae^{-3x}-3(A-3Ax)e^{-3x}$

$=(-6A+9Ax)e^{-3x}$.

$(-6A+9Ax)e^{-3x}+(2A-6Ax)e^{-3x}-3Axe^{-3x}=e^{-3x}$

$-4A=1\Rightarrow A=-\frac{1}{4}$　$\therefore y^*=-\frac{1}{4}xe^{-3x}$.

3° $y = y^* + Y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x} - \frac{1}{4} x e^{3x}$.

16. 1° 求 $y'' - 6y' = 0$ 的通解 Y

$r^2 - 6r = 0 \Rightarrow r = 0,\ r = 6 \Rightarrow Y = C_1 + C_2 e^{6x}$

2° 求 $y'' - 6y' = 2x^2 - x$ 的一个特解 y^*

$f(x) = 2x^2 - x$, $n = 2, \lambda = 0, k = 1$ $\quad y^* = x(Ax^2 + \cancel{Bx}) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$.

$y^{*\prime} = 3Ax^2 + 2Bx + C,\ y^{*\prime\prime} = 6Ax + 2B$.

$6Ax + 2B - 18Ax^2 - 12Bx - 6C = 2x^2 - x \Rightarrow \begin{cases} -18A = 2 \\ 6A - 12B = -1 \\ 2B - 6C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{9} \\ B = \frac{1}{36} \\ C = \frac{1}{108} \end{cases}$

$-18Ax^2 + (6A - 12B)x + 2B - 6C = 2x^2 - x$

$\therefore y^* = -\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{36}x^2 + \frac{1}{108}x$.

3° 通解 $y = Y + y^* = C_1 + C_2 e^{6x} - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{36}x^2 + \frac{1}{108}x$.

17. 任一点 (x, y) 的切线斜率为 y'，法线斜率为 $-\frac{1}{y'}$.

则 $-\frac{1}{y'} = -\frac{x\ln x}{x + y\ln x}$. $\quad y' = \frac{1}{x}y + \frac{1}{\ln x}$

$y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{\ln x} \quad p(x) = -\frac{1}{x},\ q(x) = \frac{1}{\ln x}$.

$$y = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left(\int \frac{1}{\ln x} e^{-\int \frac{1}{x}dx} dx + C\right)$$

$$= e^{\ln x}\left(\int \frac{1}{\ln x} e^{-\ln x} dx + C\right)$$

$$= x\left(\int \frac{1}{x\ln x} dx + C\right)$$

$$= x\left(\int \frac{1}{\ln x} d(\ln x) + C\right)$$

$$= x\left(\ln(\ln x) + C\right) = x\ln(\ln x) + C$$

$y(e) = 1 \Rightarrow 1 = e \cdot \ln(\ln e) + C \Rightarrow C = 1$

$\therefore y = x\ln(\ln x) + 1$.

18. $r^2 + k = 0$

当 $k < 0$ 时，$r^2 = -k$，$r = -\sqrt{-k}$，$r = \sqrt{-k}$. 通解为 $y = C_1 e^{-\sqrt{-k}x} + C_2 e^{\sqrt{-k}x}$.

当 $k = 0$ 时，$r^2 = 0$，$r_1 = r_2 = 0$. 通解为 $y = C_1 + C_2 x$.

当 $k > 0$ 时，$r^2 = -k$，$r = \pm\sqrt{k}i$ 通解为 $y = C_1\cos\sqrt{k}x + C_2\sin\sqrt{k}x$

19. $r^2+4r+4=0$, $(r+2)^2=0$, $r_1=r_2=-2$. $y(0)=2 \Rightarrow C_1=2$

$y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$. $y'(0)=-4 \Rightarrow C_2-2C_1=-4$

$C_2=-4+2C_1=0$

$y'=C_2e^{-2x}-2(C_1+C_2x)e^{-2x}$

$=(C_2-2C_1-2C_2x)e^{-2x}$ $\therefore y=2e^{-2x}$.

$\int_0^{+\infty} y(x)dx = \int_0^{+\infty} 2e^{-2x}dx = -\int_0^{+\infty} e^{-2x}d(-2x) = -e^{-2x}\Big|_0^{+\infty}$

$= -\left[\lim_{x\to+\infty} e^{-2x}-1\right]=1$.

20. 令 $y'=z$, 则 $y''=z'$. $\frac{dz}{z}=\frac{2x}{1+x^2}dx$ $\int\frac{dz}{z}=\int\frac{d(x^2+1)}{1+x^2}$

$(1+x^2)\frac{dz}{dx}=2xz$

$\ln z=\ln(1+x^2)+\ln C_1$ $z=C_1(1+x^2)$ $y'=C_1(1+x^2)$

$y=\int C_1(1+x^2)dx = C_1x+\frac{C_1}{3}x^3+C_2$

四. 证明题

21. $K_切=y'$, $K_{OM}=\frac{y}{x}$ $y'\cdot\left(\frac{y}{x}\right)=-1$ $ydy=-xdx$

$\int ydy=-\int xdx$ $\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+C$ $y^2=-x^2+2C$

$y(1)=\sqrt{3} \Rightarrow 3=-1+2C \Rightarrow C=2$

$\therefore x^2+y^2=4$. 原点为中心, 半径为2的圆.

22. 由 $y_1(x), y_2(x)$ 为 $y''+py'+qy=f(x)$ 的解, 得

$y_1''(x)+py_1'(x)+qy_1(x)=f(x)$ (1)

$y_2''(x)+py_2'(x)+qy_2(x)=f(x)$ (2)

(1) − (2) 得 $y_1''(x)-y_2''(x)+p[y_1'(x)-y_2'(x)]+q[y_1(x)-y_2(x)]=0$

即 $y=y_1(x)-y_2(x)$ 为 $y''+py'+qy=0$ 的解.

五. 综合题

23. 两边求导 得. $f'(x)=e^x-\int_0^x f(t)dt-xf(x)+xf(x)$

即 $f'(x)=e^x-\int_0^x f(t)\,dt$ (1)

(1) 两边求导得 $f''(x)=e^x-f(x)$ (2)

将 $x=0$ 代入原方程得 $f(0)=1$

将 $x=0$ 代入 (1) 得 $f'(0)=1$

$$f''(x)+f(x)=e^x$$

$$r^2+1=0 \Rightarrow r=\pm i \Rightarrow F(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$$

$$f^*(x)=Ae^x,\quad f^{*\prime}(x)=Ae^x,\quad f^{*\prime\prime}(x)=Ae^x$$

$$Ae^x+Ae^x=e^x \Rightarrow A=\frac{1}{2}.\quad f^*(x)=\frac{1}{2}e^x$$

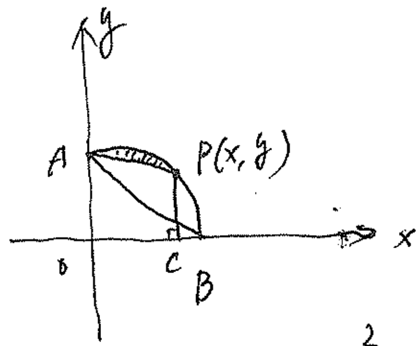
$\therefore$ 通解 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}e^x$

$$f(0)=1 \Rightarrow C_1+\frac{1}{2}=1 \Rightarrow C_1=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=-C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{1}{2}e^x$$

$$f'(0)=1 \Rightarrow C_2+\frac{1}{2}=1 \Rightarrow C_2=\frac{1}{2}$$

$\therefore$ 所求函数 $f(x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}e^x$



24. $S_{曲边APCO}=\int_0^x y(t)\,dt$

$S_{直角梯形APCO}=\frac{1}{2}(y+1)\cdot x$ $\qquad S_{曲边APCO}-S_{直角梯形APCO}=x^3$

$$\int_0^x y(t)\,dt-\frac{1}{2}x(y+1)=x^3$$

$$y-\frac{1}{2}(y+1)-\frac{1}{2}xy'=3x^2 \qquad y'-\frac{1}{x}y=-6x-\frac{1}{x}$$

$$y=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(-\int(6x+\frac{1}{x})e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right) \qquad y(0)=1 \quad y(1)=0$$

$$=e^{\ln x}\left(-\int(6x+\frac{1}{x})e^{-\ln x}dx+C\right) \qquad 0=-6+1+C$$

$$\Rightarrow C=5$$

$$=x\left(-\int(6x+\frac{1}{x})\frac{1}{x}dx+C\right) \qquad \therefore\ y=-6x^2+5x+1$$

$$=x\left(-\int(6+\frac{1}{x^2})dx+C\right)$$

$$=x\left(-6x+\frac{1}{x}+C\right)$$

$$=-6x^2+1+Cx$$

第5章 向量代数与空间解析几何

一、单项选择题

1. A　2. B　3. B　4. C　5. C　6. D

二、填空题

7. 0　8. 2　9. $\sqrt{2}$　10. $\frac{\pi}{3}$　11. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$　12. $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{-1}$

三、计算题

13. 过点 $M(2,1,1)$

直线 l 过点 $A(0,-1,-1)$，方向向量 $\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-(1,1,3)$

$\overrightarrow{MA}=(-2,-2,-2)$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{MA}$，$\vec{n}\perp\vec{s}$，$\vec{n}=\overrightarrow{MA}\times\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & -2 & -2\\ -1 & -1 & -3\end{vmatrix}=(4,-5,0)$

$\therefore$ 所求平面的方程为：$4(x-2)-5(y-1)=0$，即 $4x-5y-3=0$.

14. 过点 $(0,-1,-1)$

$\because \vec{n}\perp\vec{n_1}$，$\vec{n}\perp\vec{n_2}$，$\therefore \vec{n}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & -4\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=(-2,-13,-8)$.

由平面的点法式得所求平面的方程为：$-2x-13(y+1)-8(z+1)=0$，即 $2x+13y+8z+21=0$.

15. 过点 $(3,-2,0)$，$\vec{s_1}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=7(1,-1,-1)$，$\vec{s_2}=(3,-1,1)$.

$\vec{n}=\vec{s_1}\times\vec{s_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 7 & -7 & -7\\ 3 & -1 & +1\end{vmatrix}=-14(1,2,-1)$.

由点法式得所求平面的方程为：$-14(x-3)-28(y+2)+14z=0$，即 $x+2y-z+1=0$.

16. $|\vec{p}|=|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})}=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}}=\sqrt{3+1+2\cdot\sqrt{3}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{7}$.

$|\vec{q}|=|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})}=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}}=\sqrt{3+1-2\cdot\sqrt{3}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$.

$\vec{p}\cdot\vec{q}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=3-1=2$.

$\therefore \cos(\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}=\frac{2}{\sqrt{7}\cdot 1}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.　$\therefore \widehat{\vec{p},\vec{q}}=\arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

17. 由 $\vec{a}+3\vec{b}\perp 7\vec{a}-5\vec{b}$ 得 $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(7\vec{a}-5\vec{b})=0 \Rightarrow \begin{cases} 7|\vec{a}|^2-15|\vec{b}|^2=-16\vec{a}\cdot\vec{b} & ① \\ 7|\vec{a}|^2+8|\vec{b}|^2=30\vec{a}\cdot\vec{b} & ② \end{cases}$

由 $\vec{a}-4\vec{b}\perp 7\vec{a}-2\vec{b}$ 得 $(\vec{a}-4\vec{b})\cdot(7\vec{a}-2\vec{b})=0$

②−①得 $23|\vec{b}|^2=46\vec{a}\cdot\vec{b} \Rightarrow |\vec{b}|^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}$　代入①得 $|\vec{a}|^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\because \cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{2\vec{a}\cdot\vec{b}}=\frac{1}{2}$，$\therefore \widehat{\vec{a},\vec{b}}=\frac{\pi}{3}$.

18. 过点 $(-1,2,0)$, $\vec{s}\perp\vec{s_1}=(3,-4,0)$, $\vec{s}\perp\vec{n}=(2,-3,4)$

$\therefore \vec{s}=\vec{s_1}\times\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}=(-16,-12,-1)$

由直线的点向式方程得：$\frac{x+1}{-16}=\frac{y-2}{-12}=\frac{z}{-1}$，即 $\frac{x+1}{16}=\frac{y-2}{12}=\frac{z}{1}$.

19. $\vec{s}=(2,3-a,4+b)$, $\vec{n_1}=(2,3,-2)$, $\vec{n_2}=(1,-6,2)$

由 $l \parallel \pi_1 \Rightarrow \vec{s}\perp\vec{n_1} \Rightarrow \vec{s}\cdot\vec{n_1}=0$
由 $l \parallel \pi_2 \Rightarrow \vec{s}\perp\vec{n_2} \Rightarrow \vec{s}\cdot\vec{n_2}=0$

$\Rightarrow \begin{cases} 4+3(3-a)-2(4+b)=0 \\ 2-6(3-a)+2(4+b)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a+2b=5 \\ 3a+b=4 \end{cases}$

解得 $a=1$, $b=1$.

20.

	平面解析几何中	空间解析几何中
$(x-1)^2+y^2=1$	圆心 $(1,0)$，半径为1的圆	母线平行于z轴的圆柱面
$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$	实轴在x轴上的双曲线	母线平行于z轴的双曲柱面
$y=x+1$	一条直线	一个平面

四. 证明题

21. $\because |\vec{a}\times\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot\sin^2(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\left[1-\cos^2(\widehat{\vec{a},\vec{b}})\right]$

$=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cos^2(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ $\qquad \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$

$=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$

$\therefore$ 等式得证.

22. 平面 $\pi_1 \parallel$ 平面 π_2.

在平面 π_1 上任取一点 $A(0,0,-\frac{D_1}{C})$.

两平行平面间距离 $d=\frac{\left|-\frac{D_1}{C}\cdot C+D_2\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

五. 综合题

23. (1) 将 l_0 化为点向式，过点 $(-9,19,0)$, $\vec{s_0}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}=(-10,17,-1)$

l_0 点向式为：$\frac{x+9}{-10}=\frac{y-19}{17}=\frac{z}{-1}$，参数式为：$l_0\begin{cases} x=-9-10t \\ y=19+17t \\ z=-t \end{cases}$.

将 l_0 的参数式代入平面 π 方程得：$t=0$，故 l_0 与 π 的交点为 $(-9,19,0)$.

(2) l 过点 $(-9,19,0)$，$\because l \perp l_0,\ l \subset \pi$

$\therefore \vec{s} \perp \vec{s_0} = (-10,17,-1)$，$\vec{s} \perp \vec{n} = (2,1,1)$

$\therefore \vec{s} = \vec{s_0} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -10 & 17 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (18, 8, -44)$

故所求直线 l 的方程为：$\dfrac{x+9}{18} = \dfrac{y-19}{8} = \dfrac{z}{-44}$，即 $\dfrac{x+9}{9} = \dfrac{y-19}{4} = \dfrac{z}{-22}$.

24. $\because$ 平面 π 的法向量 $\vec{n} \perp \vec{AB}$，$\vec{n} \perp \vec{AC}$，$\therefore \vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1,-1,-2)$.

$\because$ 直线 l 的方向向量 $\vec{s} \perp \vec{n_0} = (1,-1,1)$，$\vec{s} \perp \vec{s_0} = (2,-1,0)$

$\therefore \vec{s} = \vec{n_0} \times \vec{s_0} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1,2,1)$

$\because$ 由直线与平面的夹角公式得 $\sin\theta = |\cos(\widehat{\vec{n},\vec{s}})| = \dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{s}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{s}|} = \dfrac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \theta = \pi/6$

$\because$ 直线 l 过点 $(2,3,0)$，方向向量 $\vec{s} = (1,2,1)$

$\therefore$ 直线 l 的方程为：$\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z}{1}$.

第6章 无穷级数

一、单项选择题

1. D　2. A　3. C　4. C　5. C　6. A

二、填空题

7. $0<q<\frac{1}{2}$　8. $[2,4)$　9. $2S+u_0$　10. $\frac{2}{3}$　11. $e^{x}-1,\ e^{-2}-1,\ 0.$

12. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}x^{2n},\quad x\in(-2,2).$

三、计算题

13. $\because \sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1}=\frac{2}{\sqrt{n^4+1}+\sqrt{n^4-1}}$

而 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{n^4+1}+\sqrt{n^4-1}}$，因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{\sqrt{n^4+1}+\sqrt{n^4-1}}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^4}}}=1$，

且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{n^4+1}+\sqrt{n^4-1}}$ 收敛.

因而 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1}\right)$ 收敛.

14. 当 $0<a<1$ 时，因为 $\lim_{n\to\infty}a^n=0$，即 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}=1\neq0$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 发散.

当 $a=1$ 时，因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}=\frac{1}{2}\neq0$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 发散.

当 $a>1$ 时，$\frac{1}{1+a^n}<\frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$，$\because q=\frac{1}{a}<1$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 收敛.

综上得：当 $0<a\leq1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 发散，当 $a>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 收敛.

15. $\because l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}(n+1)!}{\left(\frac{2}{n}\right)^n n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{e}<1$

$\therefore$ 由比值判别法知该级数收敛.

16. $l=\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x^{2n+2}}{3^{n+1}\sqrt{n+1}}}{\frac{x^{2n}}{3^n\sqrt{n}}}=\frac{x^2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=\frac{x^2}{3}$

当 $\frac{x^2}{3}<1$，即 $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$ 时，级数收敛.

所以该级数的收敛半径为 $R=\sqrt{3}$.

当 $x=-\sqrt{3}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，

当 $x=\sqrt{3}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛.

因而该幂级数的收敛域为 $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\ln(1+\frac{1}{n})\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}=1$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ 发散.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln(1+\frac{1}{n})$，$\because u_n=\ln(1+\frac{1}{n}) < \ln(1+\frac{1}{n+1}) = u_{n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{n})=0$

$\therefore$ 由莱布尼兹判别法得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln(1+\frac{1}{n})$ 收敛.

因而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln(1+\frac{1}{n})$ 条件收敛.

18. $f(x)=\dfrac{x}{(x+2)(2x-1)} = \dfrac{2}{5}\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{5}\dfrac{1}{2x-1}$

$=\dfrac{2}{5}\dfrac{1}{1+(x+1)}+\dfrac{1}{5}\dfrac{1}{-3+2(x+1)}$

$=\dfrac{2}{5}\dfrac{1}{1+(x+1)}-\dfrac{1}{15}\dfrac{1}{1-\frac{2(x+1)}{3}}$

$=\dfrac{2}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+1)^n-\dfrac{1}{15}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\dfrac{2(x+1)}{3}\right]^n$

$=\dfrac{2}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+1)^n-\dfrac{1}{15}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{3^n}(x+1)^n$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\dfrac{2}{5}(-1)^n-\dfrac{1}{5}\dfrac{2^n}{3^{n+1}}\right](x+1)^n.$

$\because \begin{cases}-1<x+1<1\\ -1<\frac{2}{3}(x+1)<1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2<x<0\\ -\frac{5}{2}<x<\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow -2<x<0$，$\therefore$ 收敛区间为 $x\in(-2,0)$.

19. $f(x)=\ln(1-x-2x^2)=\ln(1-2x)(1+x)=\ln(1-2x)+\ln(1+x)$

$=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cancel{(-1)^n}}{n+1}(2x)^{n+1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cancel{(-1)^n}-2^{n+1}+(-1)^n}{n+1}x^{n+1}.$

$\because \begin{cases}-1\le 2x<1\\ -1<x\le 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}\\ -1<x\le 1\end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}$，$\therefore$ 收敛区间为 $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

20. $f(x)=\cos x=\cos\left[\frac{\pi}{4}+(x-\frac{\pi}{4})\right]=\cos\frac{\pi}{4}\cos(x-\frac{\pi}{4})-\sin\frac{\pi}{4}\sin(x-\frac{\pi}{4})$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos(x-\frac{\pi}{4})-\sin(x-\frac{\pi}{4})\right]$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}(x-\frac{\pi}{4})^{2n}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x-\frac{\pi}{4})^{2n+1}\right]$

收敛区间为 $x\in(-\infty,+\infty)$.

四. 证明题

21. $\because |u_n v_n| \le \frac{1}{2}(u_n^2+v_n^2)$，由 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 的收敛，得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(u_n^2+v_n^2)$ 收敛.

$\therefore$ 由比较判别法得 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n v_n|$ 收敛.

22. $f(x)=\ln(2+x)=\ln 2(1+\frac{x}{2})=\ln 2+\ln(1+\frac{x}{2})$

$=\ln 2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(\frac{x}{2})^{n+1}$

$=\ln 2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}x^{n+1}$

$\because -1<\frac{x}{2}\le 1$，$\therefore -2<x\le 2$，收敛区间为 $(-2,2]$.

由 $f(x)=\ln 2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)}(\frac{x}{2})^{n+1}$，将 $x=2$ 代入得

$f(2)=\ln 4=\ln 2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ $\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\ln 4-\ln 2=\ln 2$.

五. 综合题

23. $f(x)=\left(\frac{e^x-1}{x}\right)'=\left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n-1}{x}\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n-1}\right)'$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}x^{n-1}\right)'=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}x^{n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}x^{n-1}$

收敛区间为：$x\in(-\infty,+\infty)$

由 $f(x)=(\frac{e^x-1}{x})'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}x^{n-1}$，将 $x=1$ 代入得

$f(1)=(\frac{e^x-1}{x})'\Big|_{x=1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=f(1)=\frac{xe^x-(e^x-1)}{x^2}\Big|_{x=1}=\frac{1}{1}=1$.

24. 由比值判别法得 $l=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{a^n}{n^2}}=a\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=a$

当 $0<a<1$ 时，$l<1$，级数收敛.

当 $a>1$ 时，$l>1$，级数发散.

当 $a=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

综上，当 $0<a\le 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^2}$ 收敛，当 $a>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^2}$ 发散.

第7章 多元函数微积分学

一. 单项选择题

1. C　2. C　3. A　4. B　5. B　6. B

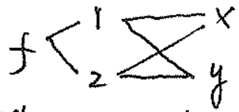
二. 填空题

7. $a=-5,\ b=-2$　8. $-\frac{2}{3}dx+\frac{1}{3}dy$　9. $f_1'+yf_2'+yzf_3'$　10. $\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$

11. 0　12. $\int_0^1 dy\int_0^{y^2} f(x,y)\,dx$.

三. 计算题

13. $z_x'=f_1'\cdot 2x+f_2'\cdot y=2xf_1'+yf_2'$

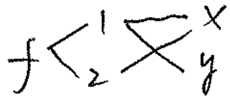


$z_{xy}''=(2xf_1'+yf_2')_y'=2x\cdot[f_{11}''\cdot(-2y)+f_{12}''\cdot x]+f_2'+y[f_{21}''\cdot(-2y)+f_{22}''\cdot x]$

$=-4xyf_{11}''+2x^2f_{12}''+f_2'-2y^2f_{21}''+xyf_{22}''$　∵ f具有二阶连续的偏导数，

$=-4xyf_{11}''+(2x^2-2y^2)f_{12}''+f_2'+xyf_{22}''$.　∴ $f_{12}''=f_{21}''$.

14. $z_y'=f_1'\cdot(-1)=-f_1'$



$z_{yx}''=(-f_1')_x'=-[f_{11}''\cdot 2+f_{12}''\cdot\cos x]$

$=-2f_{11}''-\cos x\cdot f_{12}''$.

∵ f具有二阶连续的偏导数，∴ $z_{xy}''=z_{yx}''$.

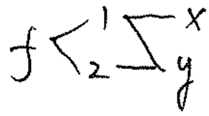
$z_{xy}''=-2f_{11}''-\cos x\cdot f_{12}''$

或 $z_x'=f_1'\cdot 2+f_2'\cdot\cos x=2f_1'+\cos x\cdot f_2'$

$z_{xy}''=2f_{11}''\cdot(-1)+\cos x\cdot f_{21}''\cdot(-1)$

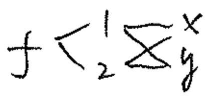
$=-2f_{11}''-\cos x\cdot f_{21}''=-2f_{11}''-\cos x\cdot f_{12}''$.

15. $z_x'=y\cdot f_1'\cdot 2=2yf_1'$



$z_{xy}''=(2yf_1')_y'=2f_1'+2y\cdot(f_{11}''\cdot 3+f_{12}''\cdot 2y)$

$=2f_1'+6yf_{11}''+4y^2f_{12}''$.



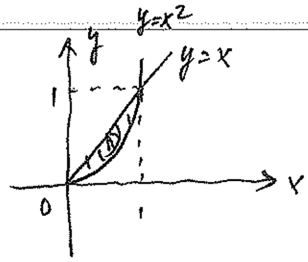
16. $z_x'=f_1'\cdot y+f_2'\cdot\frac{1}{y}+g'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)$

$=yf_1'+\frac{1}{y}f_2'-\frac{y}{x^2}g'$

$z_{xy}''=(yf_1')_y'+(\frac{1}{y}f_2')_y'-(\frac{y}{x^2}g')_y'=f_1'+y\cdot[f_{11}''\cdot x+f_{12}''\cdot(-\frac{x}{y^2})]-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}[f_{21}''\cdot x+f_{22}''\cdot(-$

$-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^2}g''\cdot\frac{1}{x}=f_1'+xyf_{11}''-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^3}f_{22}''-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''$.　(∵ f具有二阶连续偏 ∴ $f_{12}''=f_{21}''$)

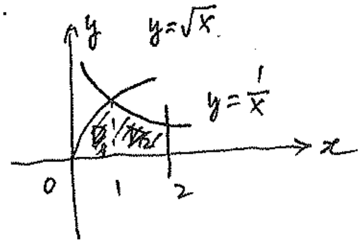
17. $D:\begin{cases} x^2\le y\le x \\ 0\le x\le 1\end{cases}$



$$原式=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} x^2y\,dy=\int_0^1 \frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{x^2}^{x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 (x^4-x^6)\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7\right)\Big|_0^1=\frac{1}{35}.$$

18. $D=D_1+D_2$



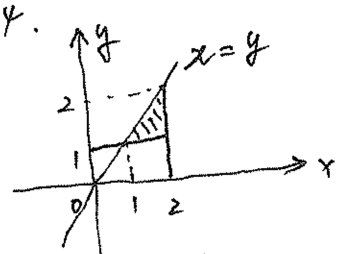
$D_1:\begin{cases}0\le y\le\sqrt{x}\\0\le x\le 1\end{cases}$ $D_2:\begin{cases}0\le y\le\frac{1}{x}\\1\le x\le 2\end{cases}$

$$原式=\iint_{D_1}x^2dxdy+\iint_{D_2}x^2dxdy$$

$$=\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{x}}x^2dy+\int_1^2dx\int_0^{\frac{1}{x}}x^2dy$$

$$=\int_0^1 x^{\frac{5}{2}}dx+\int_1^2 x\,dx$$

$$=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\Big|_0^1+\frac{1}{2}x^2\Big|_1^2=\frac{2}{7}+\frac{1}{2}(4-1)=\frac{2}{7}+\frac{3}{2}=\frac{25}{14}.$$

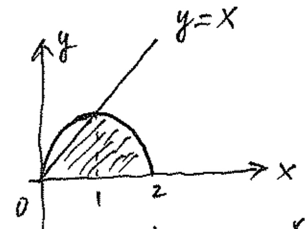


19. $$I=\int_1^2dy\int_y^2\frac{\sin x}{x-1}dx\ \xlongequal{交换积分次序}\ \int_1^2dx\int_1^x\frac{\sin x}{x-1}dy$$

$D:\begin{cases}1\le y\le x\\1\le x\le 2\end{cases}$

$$=\int_1^2\frac{\sin x}{x-1}\cdot(x-1)\,dx=\int_1^2\sin x\,dx$$

$$=-\cos x\Big|_1^2=\cos 1-\cos 2.$$



$x^2+y^2=2x$
$(x-1)^2+y^2=1$

$r^2=2r\cos\theta$
$r=2\cos\theta$

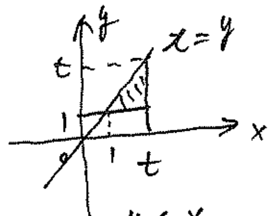
20. $D:\begin{cases}0\le r\le 2\cos\theta\\0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\end{cases}$

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r\cdot r\,dr$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\theta\,d\theta=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin^2\theta)\,d(\sin\theta)$$

$$=\frac{8}{3}\left(\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{8}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{8}\right)=\frac{10\sqrt{2}}{9}.$$

四、证明题



21. (1) $$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx\ \xlongequal{交换积分次序}\ \int_1^t dx\int_1^x f(x)dy$$

$D:\begin{cases}1\le y\le x\\1\le x\le t\end{cases}$

$$=\int_1^t f(x)(x-1)\,dx$$

(2) $$F'(t)=\left[\int_1^t f(x)(x-1)dx\right]'=f(t)(t-1)$$

$$F'(2)=f(2)(2-1)=f(2).$$

22. $F(x^2-y^2,\ y^2-z^2)=0$

两边对x求偏导数得

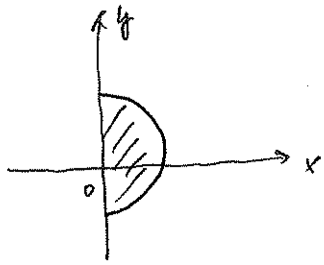
$$F_1'\cdot 2x + F_2'\cdot(-2z)\cdot z_x' = 0 \quad 解得\ z_x' = \frac{xF_1'}{zF_2'}.$$

两边对y求偏导数得

$$F_1'\cdot(-2y) + F_2'\cdot(2y-2z\cdot z_y') = 0 \quad 解得\ z_y' = \frac{yF_2'-yF_1'}{zF_2'}.$$

$$yz z_x' + xz z_y' = \frac{xyF_1'}{F_2'} + \frac{xyF_2'-xyF_1'}{F_2'} = \frac{xyF_2'}{F_2'} = xy.$$

五. 综合题



23. $D:\begin{cases}0\le r\le 1\\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$.

$$原式 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{1+r^2\cos\theta\sin\theta}{1+r^2}\, r\, dr$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}\ln 2 + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\right)\cos\theta\sin\theta\right] d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2\cdot\pi + 0 = \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

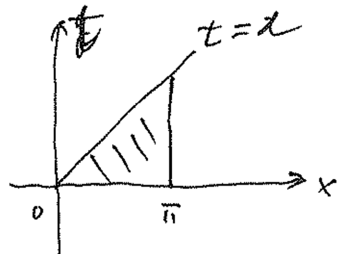
24. $$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} dx \int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}\,dt$$

$$\underline{\underline{交换积分次序}}\ \int_0^{\pi} dt \int_t^{\pi} \frac{\sin t}{\pi-t}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\pi-t}(\pi-t)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} \sin t\,dt = -\cos t\Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi-\cos 0)$$

$$=2.$$



$D:\begin{cases}t\le x\le\pi\\ 0\le t\le\pi\end{cases}$