重点题型

第一章　函数

1．求函数的定义域：

- ◆　一般类型：考虑五个要素，即“分母、根式、对数式、反三角式、复合式（取交集）”
- ◆　已知函数定义域，求其它函数的定义域：（注意：实质上就是不等式取范围的问题，另外要深刻理解**对应法则 f** 和**定义域 D**）

2．求函数解析式：

- ◆　已知 f（x），求 f[g（x）]
- ◆　已知 f[g（x）]，求 f（x）（同样要深刻理解**对应法则 f** 和**定义域 D**）

3．判断函数是否相同：

两个要素，即“对应法则 f（化简），定义域”

4．判断函数的奇偶性：

- ◆　定义域的对称性以及 f（x）与 f（-x）之间的关系
- ◆　奇偶函数的运算性质（奇偶，奇奇，偶偶——加减乘除）

典型：
对数函数的奇偶性问题——重在后面括号中的倒数关系
任何一个函数都可以表示成一个奇函数和一个偶函数的和的形式　　f（x）=1/2[f(x)+f(-x)+f(x)-f(-x)]

第二章　极限与连续

1．求极限：

∞/∞　总的思想：分母无穷大、指数 0<a<1 使值趋于 0　而约去　(1.一般式　2.根号下的一般式　3.利用指数特性进行变换，是趋于 0 值)

0/0　总的思想：清零　（1.因式分解　2.根式有理化　3.无穷小替换　**4.洛必达法则，**
如：$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x\tan x}-\frac{1}{x^2})$　）

∞-∞　总的思想：结合以上两种方法，先同分，再有理化

0-0　总的思想：结合以上两种方法，先同分，再有理化

1∞　总的思想：利用两个重要极限中的 e 值

无穷小与有界量　（以“x→0、x→∞，x*sin（1/x）、（1/x）*sinx 为例拓展思考）

初等变换

- 分子分母同除以，利用指数特性
- 和差化积，利用无穷小的等效替换
- 对含有 e 量的思考与变形（“e^x-1”）

洛必达法则 （有待进一步学习，非常重要）

注意其使用条件，只使用于：∞/∞、0/0 两种类型，有拓展类型

注意：要学会综合利用各种方法处理，其中典型题：Page44

> **典型：（直接用洛必达法则）**
> “lim x→2 sin(πx) 的等价无穷小时多少？”这个问题很容易出错，要深刻体会！
> 解决方法:令 t=x-2，则 x=t+2。lim t→0 sin[π(t+2)],人后利用**“奇变偶不变，符号看象限”（关键）**进行分析，然后可得其等价无穷小，**但最好的方法是利用洛必达法则**

2．给出分段函数式，求分段点处的极限/或者说成是该点处是否存在极限值（考虑带参数的情况）

利用“左极限=右极限”；

3．函数的连续性

- 给出函数式（带参），在 x_0 处连续，求参数
  与以上 2 相比，只多了一个连续的条件
- 给出函数式的极限值，求参数（难点在于“**∞/∞、0/0**“型）
  解决方法：
- 判断间断点的类型
  第一要考虑到间断点有哪几个点（对函数式来说是无意义的点），第二要考虑到分子为 0 的情况，此情况可能会产生可去间断点　**附：【**无意义的点一定是间断点**】**
- 求函数的连续区间（初等函数在定义域内都是连续的，因此只需对间断点进行分析）
  通常是针对于分段函数（要知道为什么会这么说），结合左右极限与分断点处的值进行分析

4.“零值定理”的应用，证明方程在某一范围内至少存在一个根（有时候避讳说范围，而改成说至少存在一个正根）

1.令 F（x）（这一步是关键，有时候涉及到变形，比如：f（x）=g（x）、f（x）-g（x）=0 有解）　2.说明 F（x）在[a，b]内连续　3.F（a）F（b）异号

5．难点概念分析

附：几个等价无穷小

夹逼准则 **sinx~x　arcsinx~x　tanx~x　arctanx~x**

单调有界数列 $e^x-1\sim x$　$a^x-1\sim x$　$\ln(1+x)\sim x$　$(1+x)^n-1\sim nx$（是难点，用到的要注意）

第三章　导数和微分

1.　用导数定义求函数的导数

a) 已知某点的导数，利用对导数定义中的△x 进行变化（包括 n△x、+-△x），以求形式的一致
b) 改变形式，即“+ $f(x_0)-f(x_0)$”，得到两个导数
c) 对 f(0)=0 的函数要注意，当 x→0 时，有 f(x)/x=f'(0)

2.在某 x0 连续，求该点处的导数

利用求导的定义求，因为有一个关系（极限/连续/导数/微分），解题方法是利用定义求导结合求极限得出结果

- **典型：** “$f(x)=(x^{502}-1)*g(x)$，其中 g(x)在 x=1 处连续，g(1)=4，求 f'(1)”

3.已知分段函数 f(x)，讨论分断点 x_0 处的可导性，并且求导

a) 在大题目中，必须使用求导的定义求
b) 在小题目中，可以求分断点两端函数在该点处的导数（快、简洁）

4.　复合函数的求导方法与微分方法

a) 由外到内，逐层求导
b) 由外到内，逐层微分

5.　隐函数所确定函数的导数和微分

a) 隐函数所确定函数的导数和微分

总的思想是，分别对方程两边的 x 和 y 求导或微分（记住 y 是 x 的函数），然后再进行整理

求一阶导数和一阶微分

求二阶导数和二阶微分（第一次会产生 x、y、y'，第二次会产生 x、y、y'、y''，因此第一次要总结出 y'的结果；其次是要注意每一步的化简）

b) 乘积式、幂指数的求导与微分（要知道这么做的好处以及为什么放在这个地方叙述？）

总的思想是，利用“对数求导法”

6.　由参数方程所确定的函数的求导方法

利用一阶微分形式的不变性，即“dy=y'*dt　dx=x'dt”

利用"dy/dx=(dy/dt)/(dx/dt) " 即"dy/dx=(dy/dt)*(dt/dx)"

7．求函数的高阶导数（要多多练习——从"化简与找规律"的方面入手）

总的思想是，先求出开始的几阶导数，然后观察总结规律，必要时用数学规纳法证明

几个常见的高阶导数：

1) $(ex)^{(n)}=e^x$ $\qquad$ $(xex)^{(n)}=(x+n)*e^x$

2) $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n*\pi/2)$ $\qquad$ $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n*\pi/2)$

3) 对$(xu)^{(n)}$的形式要分情况（如果有时候想不通，就以（x^3）$^{(n)}$次方为例）：

$$\begin{cases} n\in/N,(x^u)^{(n)}=u*(u-1)*(u-2)*(u-n+1)*x^{u-n} \\ n\in N, \begin{cases} \text{若 } n\leqq u, \text{则有}(x^u)^{(n)}=u*(u-1)*(u-2)*(u-n+1)*x^{u-n} \\ \text{若 } n>u,\text{则有（}xu\text{）}^{(n)}=0 \end{cases} \end{cases}$$

拓展： $[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}*(n-1)!*(1+x)^{-n}$

$[1/(1+x)]^{(n)}=(-1)^n*n!*(1+x)^{-n-1}$

$[(1+x)^u]^{(n)}=u*(u-1)*(u-2)*(u-n+1)*(1+x)^{u-n}$

8．涉及到切线的问题(关键是求切点(x_0、y_0))

a) 已知曲线方程，并给出**可以求出切点与斜率**的提示 【该曲线与 x、y 轴（或者是某条线）交点处的切线】 ，求**该点处**的切线方程（**关键是求切点(x_0、y_0)与斜率 k**）

b) 已知曲线方程，并给出某点处的切线方程（1.含有参数，通常是斜率 k；2.但如果不是斜率，则比较简单），求参数值

解题步骤：1.令点为(x0y0) 2.将切线表示成 $y\_x\_x_0$ 之间的关系（如何表示：1.借助曲线可得 x0 与 y0 之间的关系，统一为 x0 2.与此切线进行形式对比，以确定 x0，进而确定参数 k

- 对 b)有**典型**：

设曲线 $y=x^2+3x+1$ 上某点处的切线方程为 y=mx，求 m 的值

解：$y^0=x^2{}_0+3x_0+1$ $\quad$ $y'_0=2x_0+3$

代入切线方程得　　$y=(2x_0+3)x+1-x^2_0$ **与 y=mx 进行对比**
因此可得　$x_0=+-1$,即可得 m 值

9．微分的应用涉及到的问题包括：1.近似计算　　　2.求未知函数的变化率

1．近似计算（首先要明白这种计算的依据）
a)　一般计算
b)　公式套用：$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{x}{n}$　sinx≈x　tanx≈x　e^x≈1+x　ln(1+x)≈x
2．未知函数的变化率

- **容易出错的题目：**

1)　$y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$，求 $y'(1)$

2)　$y=\sqrt{\frac{10x-1}{10x+1}}$，求 $dy/dx, dy|_{x=0}$;

注意，对于这两道题要有心得，即看到无穷小与某个不确定的数进行乘积时，不可轻易将值定义为零

第四章　中值定理与导数的应用

1．求“单调区间和极值点”，“最值”，“凹凸区间和拐点”

求“单调区间和极值点”的解题步骤：
1)　求 f(x)的定义域
2)　**求驻点（即导数存在的点）及导数不存在的点**
　　求 f’’(x)=0 的点和 f’’(x)不存在的点
3)　列表讨论（**这个是必须的**）

附：①对于导数 $f'(x_0)$不存在的点有三种情况，1.函数本身在该点处没有定义　**2.该点处的导数趋于无穷大（对于一般函数来说，导数不存在都是这种情况）**　3.该点处的左右导数不一样
　　②对于以上 3）为什么说是必须的要明白，需要理解“极值点的存在与驻点及导数不存在的点之间的关系”和“拐点的存在与 y’’=0 的点及 y’’不存在的点之间的关系”，**以“x^3　x^4　$x^{1/3}$ 为代表进行分析**

2．证明题

- **证明根的存在性问题**

主要是针对**等式中含有导数式**，利用**罗尔定理**构造辅助函数

- **利用导数证明不等式**

拉格朗日中值定理
函数的单调性（求导 最值）
函数的凹凸性
典型：

①证明不等式 $\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$ (0<a<b)

解析：隐含两个条件，即“a<Ɛ<b (lnx)’=1/x,单调递减”（拓展：有时候题中会出现 f’(x)单调性，实则和这个问题是一样的）

②证明当 0<x<π/2,tanx>x+x^3/3
解析：1.令 f(x)= tanx_(x+x^3/3) 2.求 f’(x)单调性得 f’(x)=(tanx-x)(tanx+x)>0 3.f(0)=0,则有 f(x)>f(0)=0 故问题成立

③证明当 x>0 y>0 时，有不等式 xlnx+ylny $\geqslant (x+y)\ln\frac{x+y}{2}$ 等号仅当 x=y 时成立

解析：1 两边同除以 2 变形为 $\frac{x\ln x+y\ln y}{2}\geqslant\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2}$ 2. 分析为中值与平均值的比较（lnx） 3. 证明 lnx 的凹凸性

- **应用中值定理的证明（主要是验证定理对函数的正确性）**

1）确定条件
2）根据定理结论，求 f’(ε)值
3）确认 ε∈定义区间

3. 关于方程根的问题

主要的解决方案是：结合**端点值**、求导确定**单调性**、**极值**（**零值定理**）
题型：1.在某个区间有几个根 2.证明方程**有且仅有一个根**

4.作图题

1) 确定义域
2) 令 y’=0 y’’=0 确定极值点和拐点
3) 列表
4) 确定渐近线
5) 找出五个重要的点，作草图

5．应用题【包含边际分析（主要是征对“经济”中的“利润”问题分析）】

附：对 $f'(x)$　$f''(x)$结合的各种情况作出分析图（选择题中常出现）